МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ИХ ВЫПОЛНЕНИЯ
1 СЕМЕСТР

Учебно-методическое пособие

Предназначено для студентов 1-го курса заочной формы обучения по направлению 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Ростов-на-Дону

ДГТУ

2023

Составитель: канд. физ.мат. наук, доцент Нурутдинова И.Н.

Приведены варианты заданий контрольных работ для студентов заочной формы обучения по основным темам, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины «Высшая математика» в 1-м семестре. Приведены образцы решения всех заданий, снабжённые необходимыми теоретическими сведениями.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит индивидуальные задания контрольнй работы, выполняемой студентами заочной формы обучения в 1-м семестре. тематика заданий охватывает все основные разделы дисциплины «Высшая математика», изучаемые в 1-м семестре: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия, дифференциальное исчисление функции одной переменной, исследование функций и построение графиков, функции нескольких переменных, неопределённый интеграл.

Задания по каждой теме имеют 20 вариантов, правило выбора варианта перед заданиями контрольной работы. Представлены основные теоретическими положения и понятия, соответствующие базовому уровню изучения дисциплины, и подробное решение всех заданий. Выбор тематики осуществлялся на основе анализа ФГОС3++ в базовой подготовке бакалавров направления 13.03.02. Также приведен список теоретических вопросов для подготовки к экзамену и рекомендуемая литература.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ПРАВИЛО ВЫБОРА ВАРИАНТА

Номер варианта студент выбирает согласно порядковому номеру в журнале группы. Если порядковый номер в журнале больше 20, то номер выбирается сначала, т.е. порядковый номер 21 - номер варианта - 1, порядковый номер 22 - номер варианта - 2 и т.д.

Задание 1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2a & -3b & c \\ 3a & -6b & 5c \\ 5a & -4b & 2c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2abc \\ 3abc \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -d & 3c \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

а) Подставить значения параметров *a, b, c, d* из таблицы 1 согласно варианту и записать матрицы *A, B, C*.

б) Найти матрицы $F = AD - DA$; $G = AB$; $R = C^2 + 2C^T - 3C^{-1}$; A^{-1}.

в) Решить систему уравнений $A \cdot X = B$ тремя методами:

по формулам Крамера; матричным методом; методом Гаусса.

Таблица 1

Номер варианта	*a*	*b*	*c*	*d*	Номер варианта	*a*	*b*	*c*	*d*
1	–1	1	-2	–4	**11**	1	2	–2	-3
2	2	-1	3	–1	**12**	1	2	–3	–2
3	1	3	-1	–4	**13**	3	–2	-1	2
4	-2	1	4	2	**14**	–2	3	–4	-1
5	-1	2	2	3	**15**	1	1	-5	–1
6	-3	2	1	-1	**16**	-1	–3	2	–1
7	–1	1	3	–4	**17**	3	–1	1	5
8	2	–1	-1	4	**18**	2	3	–1	-3
9	–2	–3	3	1	**19**	1	–1	–4	2
10	-3	3	-2	1	**20**	-4	1	1	3

Задание 2. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ (см. табл.). Требуется найти:

а) длины ребер A_1A_2 и A_1A_3;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) объём пирамиды;

д) канонические уравнения прямой l, проходящей через точки A_1 и A_4;

е) уравнение плоскости П, проходящей через точки A_1, A_2, и A_3;

ж) угол между прямой l и плоскостью П;

з) высоту пирамиды.

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(1, 2, 1)	(0, 2, 5)	(–1, 3, 1)	(1, 4, 3)
2	(–1, –2, 1)	(–2, –2, 5)	(–3, –1, 1)	(–1, 0, 3)
3	(0, 2, –1)	(–1, 2, 3)	(–2, 3, 7)	(0, 4, 1)
4	(–1, 2, 0)	(–2, 2, 4)	(–3, 3, 0)	(–1, 4, 2)
5	(2, 2, 3)	(1, 2, 7)	(0, 3, 3)	(2, 4, 5)
6	(2, –1, 1)	(1, –1, 5)	(0, 0, 1)	(2, 1, 3)
7	(–1, 1, –2)	(–2, 1, 2)	(–3, 2, –2)	(–1, 3, 0)
8	(–1, 2, 1)	(–2, 2, 5)	(–3, 3, 1)	(–1, 4, 3)
9	(–2, 1, –1)	(–3, 1, 3)	(–4, 2, 1)	(–2, 3, 1)
10	(1, 1, 2)	(0, 1, 6)	(–1, 2, 2)	(1, 3, 4)
11	(0, –1, 2)	(–1, –1, 6)	(–2, 0, 2)	(0, 1, 4)
12	(3, 0, 2)	(2, 0, 6)	(1, 1, 2)	(3, 2, 4)
13	(–2, –1, 1)	(–3, –1, 5)	(–4, 0, 1)	(–2, 1, 3)
14	(1, –1, 2)	(0, –1, 6)	(–1, 0, 2)	(1, 1, 4)
15	(2, 3, 2)	(1, 3, 6)	(0, 4, 2)	(2, 5, 4)
16	(–1, 0, 2)	(–2, 0, 6)	(–3, 1, 2)	(–1, 2, 4)
17	(2, 0, 3)	(1, 0, 7)	(0, 1, 3)	(2, 2, 5)
18	(2, –1, 2)	(1, –1, 6)	(0, 0, 2)	(2, 1, 4)
19	(1, –2, 1)	(0, –2, 5)	(–1, –1, 1)	(1, 0, 3)
20	(0, 3, 2)	(–1, 3, 6)	(–2, 4, 2)	(0, 5, 4)

Задание 3.

3.1. Найти производные 1-го порядка функций *а*), *б*), *в*), и *г*);

3.2. Найти производную 2-го порядка функции *а*)

3.3. Записать дифференциал первого порядка функции а)

1	*а*) $y = x^3 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$;	*б*) $s = (5 - 3\mathrm{arctg}\,t)e^t$;	*в*) $u = tg^4(3V + 2)$;	*г*) $z = \dfrac{\ln(4-5t)}{\sin t}$.
2	*а*) $y = 2x - \dfrac{3}{x^4} + 4\sqrt{x^3}$;	*б*) $s = (3 - \cos t)(5 + 2\sin t)$;	*в*) $u = \sqrt{V - 3\ln V}$;	*г*) $z = \dfrac{t^3 - e^{3t}}{\mathrm{arcos}2t}$.

3	*а*) $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{x^2}-x;$	*б*) $s=(t^2-5\ln t)(t+\ln t);$	*в*) $u=\sqrt{\cos^3 V};$	*г*) $z=\frac{t^2+e^{2t}}{\mathrm{arsin}t}.$
4	*а*) $y=x^4+\frac{1}{x}-2\sqrt[3]{x};$	*б*) $s=(3t^3-4)(t-2\cos t);$	*в*) $u=\ln^2(5V-3);$	*г*) $z=\frac{1-3\,\mathrm{tg}\,t}{\mathrm{arctg}2t}.$
5	*а*) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x^3}+4\sqrt{x};$	*б*) $s=(6t+\arcsin t)6^t;$	*в*) $u=\ln^2(4V+3);$	*г*) $z=\frac{5+\mathrm{tg}2t}{\cos 2t}.$
6	*а*) $y=5x-\frac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6};$	*б*) $s=(t^2-3)(4t+2\ln t);$	*в*) $u=\cos^3(3V+1);$	*г*) $z=\frac{t-\arcsin 3t}{e^{-t}}.$
7	*а*) $y=x^3-\frac{3}{x^4}+\sqrt[4]{x^9};$	*б*) $s=(4-\cos t)\ln t;$	*в*) $u=\mathrm{arctg}^2\frac{V}{2};$	*г*) $z=\frac{\arccos 3t}{1-9t^2}.$
8	*а*) $y=\frac{7}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}-4x;$	*б*) $s=(3t+2\ln t)\ln t;$	*в*) $u=\mathrm{arctg}^3(2V-1);$	*г*) $z=\frac{\sin(t^2+3)}{e^{-2t}}.$
9	*а*) $y=5x^9+\frac{2}{x^3}+\sqrt[8]{x};$	*б*) $s=\frac{e^t-5t}{t^3};$	*в*) $u=\mathrm{ctg}^4\frac{V}{4};$	*г*) $z=\mathrm{arctg}\frac{t}{3}\ln(9+t^2).$
10	*а*) $y=\frac{x^5}{5}+2\sqrt[6]{x^5}-\frac{1}{x};$	*б*) $s=(7t+\arccos t)\ln t;$	*в*) $u=\ln^5(1-V);$	*г*) $z=\frac{1-3\mathrm{tg}(t/3)}{\cos(t/3)}.$
11	*а*) $y=\frac{4}{\sqrt{x}}+9x^2-\frac{7}{x};$	*б*) $s=\frac{2-\ln t}{1+2\arcsin t};$	*в*) $u=tg^3(6V+1);$	*г*) $z=e^{-4t^2}(5+\cos 2t).$
12	*а*) $y=2\sqrt{x}-\frac{4}{x}+3x^2;$	*б*) $s=(e^t-3t^2)\ln t;$	*в*) $u=\sin^3(8V+1);$	*г*) $z=\frac{3^{\sin t}-1}{\mathrm{arctg}\,2t}.$
13	*а*) $y=2x^3-\frac{5}{x^7}-\sqrt[4]{x^5};$	*б*) $s=t^3(4+2\mathrm{arctg}t);$	*в*) $u=\ln^3\frac{V}{2};$	*г*) $z=\frac{5-\sin 3t}{e^{2t}}.$
14	*а*) $y=\frac{x^4}{2}-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{x};$	*б*) $s=(e^t-3t^2)\mathrm{tg}t;$	*в*) $u=\sqrt{\arccos 2V};$	*г*) $z=\frac{\ln(t-e^{3t})}{t^4}.$
15	*а*) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x^3}+\sqrt[3]{x}-2;$	*б*) $S=(4-2\sin t)e^t;$	*в*) $u=\cos^5(4V-1);$	*г*) $z=\frac{\arcsin 2t}{1-4t^2}.$
16	*а*) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{5}\sqrt[5]{x^2}-\frac{4}{x^3};$	*б*) $s=(t-\arcsin t)\sin t;$	*в*) $u=\mathrm{ctg}^2(3-2V);$	*г*) $z=\frac{\ln(\cos t-1)}{e^{-4t}}.$
17	*а*) $y=3x^2-\frac{2}{x^4}+\sqrt[5]{x};$	*б*) $s=(3-2e^t)(6+5e^t);$	*в*) $u=\mathrm{arctg}^3\frac{V}{3};$	*г*) $z=\frac{t-\cos t}{\ln(t^2-1)}.$
18	*а*) $y=x^5-\frac{2}{x^3}+2\sqrt[7]{x^5};$	*б*) $s=(4-3\ln t)(5+2\sin t);$	*в*) $u=\arcsin^3 2V;$	*г*) $z=\frac{4t^3-2e^{3t}}{\cos t}.$
19	*а*) $y=7x^2+\frac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2};$	*б*) $s=(1+t^2)(2-3\mathrm{arcctg}t);$	*в*) $u=\sin^4(2V+3);$	*г*) $z=\frac{\mathrm{arctg}2t}{1+4t^2}.$
20	*а*) $y=5x^2+\frac{3}{x^4}-\sqrt[6]{x^7};$	*б*) $s=(3+\mathrm{tg}t)(1-5\mathrm{ctg}t);$	*в*) $u=\sqrt[3]{1-4V^2};$	*г*) $z=\frac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}.$

Задание 4. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

Номер варианта	Вид функции $f(x)$	Номер варианта	Вид функции $f(x)$
1	$\sqrt[3]{x^2+4},\ x_0=2.$	**2**	$\sqrt{1+3x},\ x_0=1.$

3	$2\sqrt[3]{x}+x-3,\ x_0=8.$	**4**	$\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2},\ x_0=-2.$
5	$2x+\frac{1}{x},\ x_0=1.$	**6**	$\sqrt{x}+2x,\ x_0=4.$
7	$\frac{x^2-3}{x},\ x_0=-1.$	**8**	$\frac{x^2}{x-2},\ x_0=1.$
9	$\sqrt{5-x^2},\ x_0=1.$	**10**	$\frac{1}{x^2}-4\sqrt[3]{x},\ x_0=-1.$
11	$\frac{3}{\sqrt{5-x^2}},\ x_0=2.$	**12**	$\frac{x^2+3x}{3},\ x_0=-1.$
13	$6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x},\ x_0=1.$	**14**	$x+\frac{1}{x},\ x_0=2.$
15	$\frac{x^2-2x-3}{4},\ x_0=3.$	**16**	$x^2+e^{3-x},\ x_0=3.$
17	$14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x},\ x_0=1.$	**18**	$\sqrt[3]{1-x^2},\ x_0=3.$
19	$\frac{x}{x^2+1},\ x_0=-2.$	**20**	$3\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt{4x}\right),\ x_0=1.$

Задание 5. Найти пределы, используя элементарные способы раскрытия неопределенностей или правило Лопиталя.

Номер варианта	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$	$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$
1	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27x^3-3x-8}{2x^2+6x-11}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2+x-20}{x^2-25}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x}{e^{2x}-1}$.
2	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^2+2x^5}{1-4x^3-3x^5}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-25}{x^2-2x-15}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3^{-x}-1}{\mathrm{tg}5x}$.
3	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-2x-1}{x^4+4x^2-8}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to-6}\frac{3x^2+17x-6}{x^2+2x-24}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{\ln x}$.
4	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x+6x^3}{10+2x-3x^3}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-9x+10}{x^3-8}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+\pi x}{\sin 7x}$.
5	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27x^3-8}{5x^4+2x-1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-x-6}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2+2x}{\mathrm{tg}4x}$.
6	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+x+2}{2x^3-3x^2+x}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{\arcsin 2x}$.
7	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5+x+6}{x^3+8x^2+1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$.

8	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x-1}{2x^2+3}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\mathrm{arctg}3x}$.
9	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+7x}{3x^3-2x+1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x^3-1}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}$.
10	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+5x^2-x^4}{2x^4-3x^3+1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{3x-1}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}-1}$.
11	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-2}{2x-1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x^3+2x}$.
12	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x-8}{2x^2+6x-11}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-5x+4}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{\ln(1+x)}$.
13	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-x}{2x^4+5x-1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{x^2-12x+20}{x^2-9x-10}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 2x}$.
14	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^5}{x^3+8}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-9x-10}{x^3+1}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\mathrm{arctg}\, x}$.
15	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-7x+6}{-3+2x^2+x^4}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{1-\cos x}$.
16	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+x-3}{27x^3+8x-5}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\arcsin 3x}$;
17	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-3x+4}{2x^3-9}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\mathrm{tg}2x}{x}$.
18	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-3x^3}{x^4+8x^2-1}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^3-8}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{x^2-8x}$.
19	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+5x-2}{x^3+2x+8}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{x^2-4x+3}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$;
20	*а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+1}{5x^4-2x^2+3}$;	*б*) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$;	*в*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{6x}}{\sin 4x}$.

Задание 6. Построить график функции $y=f(x)$, используя общую схему исследования функции.

Номер варианта	Вид функции $f(x)$	Номер варианта	Вид функции $f(x)$
1	$-5x^3+30x^2-45x+10$	**2**	$x^3-9x^2+24x-18$

3	$x^3+6x^2-15x+8$	**4**	$-x^3+9x^2-15x-3$
5	$x^3+12x^2+45x+50$	**6**	$2x^3-15x^2+24x+1$
7	x^3-3x^2-9x-5	**8**	$-x^3+6x^2-9x+2$
9	$x^3+3x^2-24x+28$	**10**	x^3+4x^2-3x-8
11	x^3+3x^2-9x+5	**12**	$-x^3+x^2+5x+3$
13	$x^3-3x^2-24x-28$	**14**	$x^3-12x+5$
15	x^3-6x^2+9x-4	**16**	$2x^3-12x^2+18x-5$
17	$x^3-6x^2-15x-8$	**18**	$x^3-15x^2+48x+3$
19	$x^3-12x^2+45x-50$	**20**	x^3+6x^2+9x+4

Задание 7. Найти частные производные первого порядка от функции по каждому аргументу.

№ вар.	$\boldsymbol{Z(x,y)}$ $\boldsymbol{Z'_x=?\ Z'_y=?}$	$\boldsymbol{Z(x,y)}$ $\boldsymbol{Z'_x=?\ Z'_y=?}$	$\boldsymbol{u(x,y,z)}$ $\boldsymbol{u'_x=?\ u'_y=?u'_z=?}$
1	$a)\,Z=x^5y^{-1}-3x^2\sqrt{y}$	$б)\,Z=4^{-y}\operatorname{tg}\left(xy^2\right)$	$в)\ u=\operatorname{tg}x\cdot e^{yz}$
2	$a)\,Z=\dfrac{3}{x^2}-\sqrt[3]{x^2y}$	$б)\,Z=xy\arcsin y$	$в)\ u=\operatorname{tg}z\left(x^2-\ln y\right)$
3	$a)\,Z=\dfrac{x^2y}{2}-\dfrac{x}{y}$	$б)\,Z=\sqrt{x^2+y^2}\ln x$	$в)\ u=y\sin\left(x^2-z\right)$
4	$a)\,Z=2xy^3-\sqrt{x^3y^5}$	$б)\,Z=\left(x-y^2\right)\cos 2x$	$в)\ u=\left(y^3-2x^3\right)\ln z$
5	$a)\,Z=\sqrt{xy^3}+x(1-y^2)$	$б)\,Z=x^3\operatorname{arctg}\left(y^2-x\right)$	$в)\ u=z^3\cdot\sqrt{x-5y^2}$
6	$a)\,Z=1-2x^2y+\sqrt[4]{xy}$	$б)\,Z=\cos y\cdot\arcsin(xy)$	$в)\ u=\left(x-\sqrt{y}\right)e^{2z}$
7	$a)\,Z=\dfrac{1}{3}x^3y^3-\dfrac{2}{y}$	$б)\,Z=y\cdot\arccos(x^2y)$	$в)\ u=\left(x^2-y^2\right)\cos 3z$
8	$a)\,Z=x\sqrt{x^3y}-\dfrac{x^2}{y^2}$	$б)\,Z=3^{-xy}+\cos^2 x$	$в)\ u=e^{-x}\cdot\sin\left(yz\right)$
9	$a)\,Z=y^3+6x\sqrt{y}-5$	$б)\,Z=\operatorname{tg}2x\cdot\arcsin(xy)$	$в)\ u=y^2\cdot\cos\left(x+3z\right)$
10	$a)\,Z=x^2-3y+y\sqrt[3]{x}$	$б)\,Z=x^2\cdot\operatorname{ctg}\left(xy\right)$	$в)\ u=\left(y^3-2x\right)\ln 3z$

11	$а) Z = x\left(x^2 - y\right) - \sqrt[3]{y}$	$б) Z = \sqrt{y} \cdot \ln\left(x^2 y\right)$	$в)\ u = \left(x^2 + e^{2z}\right)\sin 4y$
12	$а) Z = \dfrac{x}{y^2} + \dfrac{2y}{x}$	$б) Z = e^{3x}\cos(2x - y)$	$в)\ u = \left(x^2 - e^z\right)\cos(xy)$
13	$а) Z = y^2\left(x^3 + 2y\right) - \dfrac{x}{y^3}$	$б) Z = e^{4y}\ln\left(x^2 + y\right)$	$в)\ u = \left(e^y - z^3\right)\ln 2y$
14	$а) Z = \left(1 - x^2\right)y^3 + \sqrt{y}$	$б) Z = \sin 2x \cdot 2^{xy}$	$в)\ u = \sqrt{x + 3y} \cdot \ln z$
15	$а) Z = \dfrac{x}{2} - x\left(y^4 + 5\right)$	$б) Z = \sqrt{x^3 - \ln y}$	$в)\ u = \mathrm{tg}4x \cdot \ln(y + 3z)$
16	$а) Z = x^2 - 4x\sqrt{y}$	$б) Z = y^2 \cdot \mathrm{arctg}(xy)$	$в)\ u = \sqrt{z} \cdot \cos(x - y^2)$
17	$а) Z = 4xy^3 + \sqrt[8]{x^3}$	$б) Z = \cos^2 x \ln(x - y)$	$в)\ u = \ln y \cdot \sin(3x + z)$
18	$а) Z = 2x^3 + 2\sqrt{xy} - 1$	$б) Z = \left(x^2 + 3y\right)^3$	$в)\ u = 3^{x-y} \cdot \cos 2z$
19	$а) Z = y(2x - y) + \sqrt[3]{x^2 y}$	$б) Z = y\sin^3 2x$	$в)\ u = e^z \ln\left(x^2 - y^2\right)$
20	$а) Z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}$	$б) Z = e^x \cos\left(3x + y^2\right)$	$в)\ u = \left(x^2 - e^{3z}\right)\cos 2y$

Задание 8. Дана функция скалярного поля $u = u\,(x, y, z)$. Найти:
а) градиент функции u точке $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, модуль градиента и объяснить физический смысл полученного результата;
б) производную функции u в точке $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\bar{S}$.

№ вар.	$u\,(x, y, z)$	$M_0\,(x_0, y_0, z_0)$	$\bar{s}$
1	$u = x^2 - 3y^2 + \ln z^2$	$(2, -3, 1)$	(1; 1; 3)
2	$u = \left(x^2 + y^2\right)e^{z-1}$	$(-1, 2, 1)$	(–3; 0; 4)
3	$u = \cos(x - y) + z^3$	$\left(\dfrac{\pi}{2}, 0, 1\right)$	(1; –2; 2)

4	$u=(2z+1)e^{x-2y}$	$(2, 1, -1)$	(1; 1; 1)
5	$u=\sin(xyz)$	$(1, \pi, 1)$	(2; 2; 1)
6	$u=xy^2z$	$(2, 1, 1)$	(1; 2; 2)
7	$u=\ln(x^2+yz)$	$(1, 2, 2)$	(0; 3; 4)
8	$u=e^{xy}(z^2+z)$	$(1, 0, 1)$	(0; –3; 4)
9	$u=\sin(xy)+z^3$	$(\pi, 2, 1)$	(–1; –1;0)
10	$u=x^y+z^2$	$(e, 1, 2)$	(–2; –1; 2)
11	$u=\operatorname{arctg}(xy)+z^2$	$(1, -1, 2)$	(–1; 1; 2)
12	$u=(3x-1)e^{z+2y}$	$(1, -1, 2)$	(0; 1; 0)
13	$u=x^2y+yz-e^{xy}$	$(0, 2, -1)$	(–3; 0; 4)
14	$u=\sqrt{9-xyz}$	$(1, 1, 5)$	(1; 1; 0)
15	$u=\ln(xy+z^2)$	$(2, 2, 2)$	(3; 0; 4)
16	$u=x^2z+y^2-z^2xy$	$(1, 2, -1)$	(–2; –2; 1)
17	$u=\ln(x^2+y^2+z^2)$	$(2, 1, 2)$	(4; 3; 0)
18	$u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$(4, 3, 0)$	(–1; 1; 1)
19	$u=e^{x^2+y^2}(z^2+1)$	$(1, 0, 2)$	(2; –1; –2)
20	$u=\operatorname{arctg}(xyz)$	$(2, 1, 1)$	(2; 1; 2)

Задание 9. Исследовать на экстремум функцию $Z = Z(x, y)$.

№ вар.	***Z* (*x*, *y*)**	**№ вар.**	***Z* (*x*, *y*)**
1	$z=3x+6y-x^2-xy+y^2$	**2**	$z=x^4-2x^2+y^2+2y+3$
3	$z=1+6x-x^2-xy-y^2$	**4**	$z=(x^2+y)e^{\frac{y}{2}}$
5	$z=x^3+8y^3-6xy+5$	**6**	$z=x^3-y^3-3xy$

7	$z=x^2+xy+y^2-6x-9y$	**8**	$z=\frac{x^2}{2}+2xy+\frac{y^2}{2}-4x-5y$
9	$z=x^2+y^2+xy-4x-5y$	**10**	$z=1+2x-4y-x^2-y^2$
11	$z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$	**12**	$z=2xy-4x-2y$
13	$z=x^2+y^2+4y-2x+4$	**14**	$z=x^2+y^2+\frac{(x+2y-16)^2}{5}$
15	$z=x^2-2xy+4y$	**16**	$z=(y-x)^2+(y+2)^2$
17	$z=e^{\frac{x}{2}}\left(x-y^2\right)$	**18**	$z=xy(1-x-y)$
19	$z=x^3+xy+6x+y+1$	**20**	$z=x^2+xy+y^2-2y-5$

Задание 10. Пользуясь таблицей основных интегралов и правилами интегрирования, найти интегралы.

№ вар.	Интегралы	№ вар.	Интегралы
1	$\int\left(\frac{3}{\sqrt{x^2+5}}-\frac{2+x^2}{x^3}+4\sqrt[3]{x^2}\right)dx$	**2**	$\int\left(\frac{10}{3-2x^2}+4e^x-\frac{4-x^2}{2-x}\right)dx$
3	$\int\left(\frac{2}{\sqrt{3-x^2}}+\frac{5-x}{x^2}-2\sqrt[4]{x^3}\right)dx$	**4**	$\int\left(\frac{2}{7x^2+2}+2^x-\frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$
5	$\int\left(\frac{7}{3x^2+16}-\frac{x^4+5}{x^5}+3\sqrt{x}\right)dx$	**6**	$\int\left(\frac{8}{\sqrt{6-x^2}}-2\sin x+\frac{x^2-25}{x+5}\right)dx$
7	$\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$	**8**	$\int\left(\frac{2}{4x^2-3}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx$
9	$\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx$	**10**	$\int\left(\frac{5}{6x^2+5}+7^x-\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$
11	$\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$	**12**	$\int\left(\frac{6}{3x^2-5}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$

13	$\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$	**14**	$\int\left(\frac{4}{2-5x^2}+2e^x-\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx$
15	$\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$	**16**	$\int\left(\frac{12}{3+2x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$
17	$\int\left(\frac{3}{\sqrt{6-x^2}}+\frac{2+x^2}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$	**18**	$\int\left(\frac{7}{5x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx$
19	$\int\left(\frac{6}{\sqrt{4+x^2}}-\frac{3x+x^3}{x^3}+6\sqrt[5]{x^2}\right)dx$	**20**	$\int\left(\frac{4}{5x^2-1}-\frac{1-x^2}{1+x}+5e^x\right)dx$

Задание 11. Проинтегрировать подходящей заменой переменного или подведением под знак дифференциала.

№ вар.	Интегралы		
1	$\int\cos 2x\,dx$	$\int\frac{xdx}{2x^2+5}$	$\int\frac{dx}{2x^2+6x-9}$
2	$\int\frac{dx}{\sin^2 8x}$	$\int x\sin(x^2-1)\,dx$	$\int\frac{dx}{3x^2+4x+5}$
3	$\int\frac{dx}{5x+3}$	$\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$	$\int\frac{dx}{\sqrt{9-8x-x^2}}$
4	$\int e^{1-5x}\,dx$	$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-5}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+3}}$
5	$\int\frac{dx}{1-3x}$	$\int\frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x}$	$\int\frac{2x+1}{x^2-4x+6}dx$
6	$\int\cos(1-3x)\,dx$	$\int\frac{\cos x\,dx}{7+\sin^2 x}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{6+4x-x^2}}$
7	$\int\sin 5xdx$	$\int\frac{x^3dx}{x^8+16}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-7}}$
8	$\int e^{9x+2}dx$	$\int\frac{\ln x\,dx}{x}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{15-2x+x^2}}$

9	$\int \sin 12x\,dx$	$\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x}$	$\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+10x+12}}dx$
10	$\int \cos(4x+3)\,dx$	$\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$	$\int \frac{x-5}{x^2-6x+2}dx$
11	$\int 10^{2x+1}\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{x-3}{x^2+6x+10}dx$
12	$\int \sin(2-3x)dx$	$\int (2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+9}}$
13	$\int e^{1-3x}\,dx$	$\int x(3+x^2)^7\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$
14	$\int 5^{3x+2}\,dx$	$\int \frac{x^2dx}{x^3-3}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{10-2x-x^2}}$
15	$\int \cos 9x\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$	$\int \frac{x+5}{6+10x+x^2}dx$
16	$\int \cos 4x\,dx$	$\int \frac{xdx}{4+x^4}$	$\int \frac{x-2}{x^2+4x+5}dx$
17	$\int e^{5x}\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}$	$\int \frac{2x+5}{x^2-6x+1}dx$
18	$\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$	$\int x^2(3-x^3)^{10}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-x^2}}$
19	$\int \sin\frac{x}{2}dx$	$\int e^{\sin x}\cos x\,dx$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-8x+1}}$
20	$\int 8^{5x+1}\,dx$	$\int \frac{dx}{x\ln x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{13-2x-x^2}}$

Задание 12. Проинтегрировать по частям.

№ вар.	Интегралы	№ вар.	Интегралы
1	$\int (3x+2)\ln x\,dx$	**2**	$\int (2x-1)\ln x\,dx$
3	$\int (x-2)\cos 2x\,dx$	**4**	$\int (3-x)\ln x\,dx$

5	$\int (2x+1)e^{3x}\,dx$	**6**	$\int (6-5x)\ln x\,dx$
7	$\int (2x-1)\sin 2x\,dx$	**8**	$\int \operatorname{arctg} x\,dx$
9	$\int (5x+2)\cos 2x\,dx$	**10**	$\int \arcsin x\,dx$
11	$\int (3-4x)e^{x}\,dx$	**12**	$\int \arccos x\,dx$
13	$\int (6x+1)\sin x\,dx$	**14**	$\int \operatorname{arcctg} x\,dx$
15	$\int (5-2x)\cos 3x\,dx$	**16**	$\int x\ln x\,dx$
17	$\int (6-5x)e^{2x}\,dx$	**18**	$\int (4-3x)\ln x\,dx$
19	$\int (x+1)\sin 4x\,dx$	**20**	$\int x\sin 3x\,dx$

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

1. Матрицы. Операции с матрицами. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Матрицей размера $m \times n$ называется упорядоченная таблица, составленная из чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Обозначаются матрицы A, B, C и т. д. Элемент матрицы, находящийся в строке с номером i и столбце с номером j, обозначается a_{ij}. Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица C того же размера, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ:

$$C = \lambda \cdot A \Longleftrightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij} \, (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n).$$

Суммой двух матриц A и B одинаковых размеров называется матрица C того же размера, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = A + B <=> c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \, (i = 1,..., m;\ j = 1,..., n). \qquad (1.1)$$

Умножение матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведением матрицы $A_{m\times k}$ на матрицу $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$C = A \cdot B;\ <=> c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{ik} \cdot b_{kj} \, (i = 1,..., m;\ j = 1,..., n). \qquad (1.2)$$

Из определения произведения матриц заключаем, что операция умножения не обладает свойством коммутативности, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Возведение квадратной матрицы A в целую положительную степень $p(p > 1)$: $A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot ... \cdot A}_{p\ \text{ðàç}}$.

Матрицей, *транспонированной* к матрице A, называется матрица, образованная из матрицы A заменой её строк соответствующими столбцами. Транспонированная матрица к матрице A обозначается A^{T}.

Всякой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие по определённому закону некоторое число, которое называется *определителем* того же порядка матрицы A и обозначается $|A|$.

Определитель первого порядка равен самому числу.

Определитель второго порядка определяется равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.3)$$

Определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.4)$$

Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n–1)-го порядка, полученный из исходного определителя путём вычеркивания i-й строки и j-го столбца. Обозначается минор M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т. е. A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Формулу (1.4) можно записать таким образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Единичной называется квадратная матрица порядка n, у которой элементы главной диагонали a_{11}, a_{22}, … , a_{nn} равны 1, а остальные элементы равны 0. Пусть E — единичная матрица. При умножении матрицы A на E слева или справа получается матрица A: $AE = EA = A$.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A, если выполняются условия: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Обратная матрица к квадратной матрице A существует тогда и только тогда, когда определитель матрицы A не равен нулю, т. е. $\left|\grave{A}\right| \neq 0.$ При этом

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^*)^T, \tag{1.5}$$

где A^* — матрица, в которой каждый элемент матрицы A заменён его алгебраическим дополнением. Такая матрица называется *присоединённой* к матрице A.

Минором порядка k матрицы A называется определитель порядка k матрицы, составленный из элементов матрицы A, стоящих на пересечении произвольных k строк и k столбцов.

Рангом матрица называется число r, такое, что выполняются условия:

1) существует минор порядка r, не равный нулю;

2) все миноры большего порядка, начиная с (r+1), равны нулю.

Ранг матрицы A обозначается $r(A)$. Ранг матрицы — это наибольший порядок её минора, не равного нулю. Этот минор называется *базисным*.

Элементарные преобразования, не меняющие ранга матрицы:

1) перестановка строк (столбцов) местами;
2) транспонирование;
3) вычёркивание строки (столбца), все элементы которой равны нулю;
4) умножение какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля;
5) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

Рассмотрим систему m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.6}$$

Обозначим матрицу из коэффициентов при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$ её называют *основной матрицей системы*.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$ — столбец свободных членов, $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$ — столбец неизвестных,

$$(A/B) = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ — расширенная матрица системы.

Систему уравнений (1.6) можно записать в матричном виде:

$$A \cdot X = B. \tag{1.7}$$

Совокупность чисел d_1, d_2,…, d_n, обращающих все уравнения системы (1.7) в тождества, называется *решением системы*.

Система уравнений *совместна*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместна*, если она не имеет решения.

Две системы уравнений называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Элементарные преобразования системы уравнений, переводящие её в равносильную систему:

1) перестановка местами любых двух уравнений;

2) умножение обеих частей любого уравнения на число, отличное от нуля;

3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число.

Система уравнений называется *неоднородной*, если $B \neq 0$, и *однородной*, если $B = 0$.

Система уравнений называется *определённой*, если она имеет единственное решение, и *неопределённой*, если она имеет бесконечное множество решений.

Исследование системы уравнений на совместность основано на следующей теореме:

Теорема Кронекера—Капелли. Для того, чтобы система уравнений с n неизвестными была совместна, необходимо и достаточно чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы системы, т. е. $r(A) = r(A \mid B) = r$.

При этом:

1) если $r = n$, система определена;

2) если $r<n$, система не определена.

Рассмотрим следующие методы решения СЛАУ: метод Крамера, матричный метод, метод Жордана—Гаусса.

1. Метод Крамера

Применяется для решения неоднородных систем n уравнений с n неизвестными, у которых определитель основной матрицы системы отличен от нуля: $\Delta = |A| \neq 0$.

Тогда система имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{1.8}$$

где Δ_i — определитель, полученный из определителя системы Δ заменой i-го столбца матрицы A столбцом свободных членов B.

2. Матричный метод

Применяется при тех же условиях, что и метод Крамера. Столбец неизвестных находим, решая матричное уравнение (1.7). Умножим (1.7) слева на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

По определению обратной матрицы $A^{-1} \cdot A = E$, следовательно,

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Умножение матрицы на единичную матрицу не меняет матрицу, поэтому $E \cdot X = X$ и

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{1.9}$$

Метод Гаусса

Применяется для решения как неоднородных, так и однородных систем с произвольным числом уравнений m и произвольным числом неизвестных n. С помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы системы $(A \mid B)$ исходную систему (4) преобразуют в равносильную, которая позволяет решить вопрос о совместности системы, и, если она совместна, записать её решение. Преобразования проводятся так, чтобы матрица $(A \mid B)$ приобрела треугольный вид (элементы, расположенные ниже главной диагонали равны), после чего, если, система совместна, находят её решение или делают вывод о её несовместности.

Замечание 1. Если при преобразованиях появляется строка, полностью состоящая из нулей, то её можно отбросить.

Замечание 2. Если при преобразованиях появляется строка, соответствующая противоречивому уравнению вида:

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b_i, \qquad \text{где } b_i \neq 0,$$

то процесс преобразований на этом прекращают, так как система уравнений несовместна.

Задание 1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2a & -3b & c \\ 3a & -6b & 5c \\ 5a & -4b & 2c \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 2abc \\ 3abc \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -d & 3c \end{pmatrix}$,

$$D=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где значения параметров следующие $a=1$, $b=1$, $c=-1$, $d=4$.

а) Подставить значения параметров a, b, c, d и записать матрицы A, B, C.

б) Найти матрицы $F = AD - DA$; $G = AB$; $R = C^2 + 2C^T - 3C^{-1}$; A^{-1}.

в) Решить систему уравнений $A\cdot X=B$ тремя методами:

по формулам Крамера; матричным методом; методом Гаусса.

Решение.

а) Подставим значения параметров и получим следующие матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

б) Для нахождения матрицы F выполним последовательно действия умножения и вычитания матриц по формулам (1.2) и (1.1) соответственно:

$$A\cdot D=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot(-3)+(-3)\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 4+(-3)\cdot 2+(-1)\cdot(-5) & 2\cdot 3+(-3)\cdot 0+(-1)\cdot(-1) \\ 3\cdot(-3)+(-6)\cdot 1+(-5)\cdot 2 & 3\cdot 4+(-6)\cdot 2+(-5)\cdot(-5) & 3\cdot 3+(-6)\cdot 0+(-5)\cdot(-1) \\ 5\cdot(-3)+(-4)\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 5\cdot 4+(-4)\cdot 2+(-2)\cdot(-5) & 5\cdot 3+(-4)\cdot 0+(-2)\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -11 & 7 & 7 \\ -25 & 25 & 14 \\ -23 & 22 & 17 \end{pmatrix}.$$

$$D\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & -5 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 3 & -6 & -5\\ 5 & -4 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3\cdot2+4\cdot3+3\cdot5 & (-3)\cdot(-3)+4\cdot(-6)+3\cdot(-4) & (-3)\cdot(-1)+4\cdot(-5)+3\cdot(-2)\\ 1\cdot2+\ 2\cdot3+0\cdot5 & 1\cdot(-3)+2\cdot(-6)+\ \ 0\cdot(-4) & 1\cdot(-1)+\ \ 2\cdot(-5)+0\cdot(-2)\\ 2\cdot2+(-5)\cdot3+(-1)\cdot5 & 2\cdot(-3)+(-5)\cdot(-6)+(-1)\cdot(-4) & 2\cdot(-1)+(-5)\cdot(-5)+(-1)\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}21 & -27 & -23\\ 8 & -15 & -11\\ -16 & 28 & 25\end{pmatrix}.$$

$$F=A\cdot D-D\cdot A=\begin{pmatrix}-11 & 7 & 7\\ -25 & 25 & 14\\ -23 & 22 & 17\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}21 & -27 & -23\\ 8 & -15 & -11\\ -16 & 28 & 25\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-11-21 & 7-(-27) & 7-(-23)\\ -25-8 & 25-(-15) & 14-(-11)\\ -23-(-16) & 22-28 & 17-25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-32 & 34 & 30\\ -33 & 40 & 25\\ -7 & -6 & -8\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу G:

$$G=A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 3 & -6 & -5\\ 5 & -4 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot0+(-3)\cdot(-2)+(-1)\cdot(-3)\\ 3\cdot0+(-6)\cdot(-2)+(-5)\cdot(-3)\\ 5\cdot0+(-4)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 27\\ 14\end{pmatrix}.$$

Определим A^{-1} по формуле (1.5). Вычислим определитель матрицы A по формуле (1.4):

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 3 & -6 & -5\\ 5 & -4 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-6 & -5\\ -4 & -2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & -5\\ 5 & -2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3 & -6\\ 5 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=2(12-20)+3(-6+25)-1(-12+30)=23.$$

$|A|=23\neq0,$ следовательно, матрица системы имеет обратную A^{-1}, которую найдём по формуле (1.5). Для этого вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-6 & -5\\ -4 & -2\end{vmatrix}=-8,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & -5\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-19,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & -6\\ 5 & -4\end{vmatrix}=18,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -4 & -2\end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -6 & -5\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{vmatrix}=7,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -6\end{vmatrix}=-3.$$

Получим A^{-1} :

$$A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix}-8 & -2 & 9\\ -19 & 1 & 7\\ 18 & -7 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8/23 & -2/23 & 9/23\\ -19/23 & 1/23 & 7/23\\ 18/23 & -7/23 & -3/23\end{pmatrix}. \qquad (1.10)$$

Найдем матрицу R. Определим матрицу C^2:

$$C^2=C\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot(-4) & 1\cdot 2+\ 2\cdot(-3)\\ -4\cdot 1+(-3)\cdot(-4) & -4\cdot 2+(-3)\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -4\\ 8 & 1\end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу C: $\quad C^T=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$

и найдём произведение $2C^T$: $\quad 2C^T=2\begin{pmatrix}1 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -8\\ 4 & -6\end{pmatrix}.$

Определим C^{-1} по формуле (1.5): $C^{-1}=\dfrac{1}{|C|}(C^*)^T$.

Вычислим определитель матрицы C по формуле (1.3):

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & -3\end{vmatrix}=1\cdot(-3)-2\cdot(-4)=-3+8=5\neq 0.$$

Следовательно, C^{-1} существует. Определим алгебраические дополнения элементов матрицы C и присоединённую матрицу C^*:

$C_{11}=-3;\ C_{12}=4;\ C_{21}=-2;\ C_{22}=1;$

$C^*=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, тогда $(C^*)^T=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ и обратная матрица C^{-1}:

$$C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}6 & -0{,}4\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}.$$

Проверим правильность нахождения C^{-1}. Для этого перемножим полученную матрицу на данную матрицу C слева и справа и убедимся, что получается единичная матрица:

$$C^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix}-0{,}6 & -0{,}4\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}6\cdot 1+(-0{,}4)\cdot(-4) & -0{,}6\cdot 2+(-0{,}4)\cdot(-3)\\ 0{,}8\cdot 1+0{,}2\cdot(-4) & 0{,}8\cdot 2+0{,}2\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$C\cdot C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0{,}6 & -0{,}4\\ 0{,}8 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-0{,}6)+2\cdot 0{,}8 & 1\cdot(-0{,}4)+2\cdot 0{,}2\\ -4\cdot(-0{,}6)+(-3)\cdot 0{,}8 & -4\cdot(-0{,}4)+(-3)\cdot 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрица C^{-1} определена правильно.

Найдем произведение матрицы C^{-1} на 3:

$$3C^{-1}=3\begin{pmatrix}-0,6 & -0,4\\ 0,8 & 0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1,8 & -1,2\\ 2,4 & 0,6\end{pmatrix}.$$

Окончательно получим:

$$R=C^2+2C^T-3C^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & -4\\ 8 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -8\\ 4 & -6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1,8 & -1,2\\ 2,4 & 0,6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7+2-(-1,8) & -4-8-(-1,2)\\ 8+4-2,4 & 1-6-0,6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3,2 & -10,8\\ 9,6 & -5,6\end{pmatrix}.$$

в) Систему линейных алгебраических уравнений $A{\cdot}X = B$ запишем в координатной форме:

$$\begin{cases}2x_1 & -3x_2 & -x_3=0,\\ 3x_1 & -6x_2 & -5x_3=-2,\\ 5x_1 & -4x_2 & -2x_3=-3.\end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера.

Определитель системы $\Delta=|A|=23$ вычислили в пункте б) при нахождении обратной матрицы.

Так как $\Delta\neq 0,$ система имеет единственное решение, которое находим по формулам Крамера (1.8):

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & -3 & -1\\ -2 & -6 & -5\\ -3 & -4 & -2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-2 & -5\\ -3 & -2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-2 & -6\\ -3 & -4\end{vmatrix}=3(4-15)-1(8-18)=-23;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 3 & -2 & -5\\ 5 & -3 & -2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-2 & -5\\ -3 & -2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=2(4-15)-1(-9+10)=-23;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -3 & 0\\ 3 & -6 & -2\\ 5 & -4 & -3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-6 & -2\\ -4 & -3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=2(18-8)+3(-9+10)=23.$$

Итак, $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=-1,\ x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=-1,\ x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=1.$

Сделаем проверку, подставив найденные значения x_1, x_2, x_3 в исходную систему, и убедимся, что все три уравнения данной системы обращаются в тождества:

$$\begin{cases} 2\cdot(-1)-3\cdot(-1)-1=-2+3-1=0; \\ 3\cdot(-1)-6\cdot(-1)-5\cdot 1=-3+6-5=-2; \\ 5\cdot(-1)-4\cdot(-1)-2\cdot 1=-5+4-2=-3; \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0; \\ -2=-2; \\ -3=-3. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

Решим систему матричным методом.

В пункте б) нашли обратную матрицу (1.10)

$$A^{-1}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -8 & -2 & 9 \\ -19 & 1 & 7 \\ 18 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.9) имеем:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -8 & -2 & 9 \\ -19 & 1 & 7 \\ 18 & -7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}=\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -8\cdot 0 & -2\cdot(-2) & +9\cdot(-3) \\ -19\cdot 0 & +1\cdot(-2) & +7\cdot(-3) \\ 18\cdot 0 & -7\cdot(-2) & -3\cdot(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{23}\begin{pmatrix} -23 \\ -23 \\ 23 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=1$.

Решим систему методом Гаусса.

Преобразования расширенной матрицы системы оформим в виде таблицы:

A/B	Σ	Примечания
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & -5 & -2 \\ 5 & -4 & -2 & -3 \end{array}\right)$	$\begin{matrix} -2 \\ -10 \\ -4 \end{matrix}$	Вычтем из второй строки первую и поменяем эти строки местами.
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & -2 & -3 \end{array}\right)$	$\begin{matrix} -8 \\ -2 \\ -4 \end{matrix}$	Вычтем из второй строки первую, умноженную на 2, а из третьей строки первую, умноженную на 5.
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 11 & 18 & 7 \end{array}\right)$	$\begin{matrix} -8 \\ 14 \\ 36 \end{matrix}$	Вычтем из третьей строки вторую, умноженную на 4, и поменяем знаки элементов полученной третьей на противоположные.
$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \end{array}\right)$	$\begin{matrix} -8 \\ 14 \\ 20 \end{matrix}$	Поменяем вторую и третью строку местами.

$\begin{array}{rrr\|r} 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} -8 \\ 20 \\ 14 \end{array}$	Вычтем из третьей строки вторую, умноженную на 3.
$\begin{array}{rrr\|r} 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & -23 & -23 \end{array}$	$\begin{array}{r} -8 \\ 20 \\ -46 \end{array}$	Разделим третью строку на (-23).
$\begin{array}{rrr\|r} 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} -8 \\ 20 \\ 2 \end{array}$	Преобразования закончены. Очевидно, что ранги матриц A, и $A\|B$ совпадают и равны 3, следовательно система совместна и имеет единственное решение.

Замечание. Во втором столбце таблицы для контроля записаны суммы строк матрицы $A|B$, с которыми производим те же преобразования, что и с элементами матрицы, если на каком-то шаге преобразований элемент второго столбца не будет равен сумме элементов соответствующей строки матрицы $A|B$, то допущена ошибка при преобразовании данной строки.

Итак, найдём решение системы. Система уравнений после преобразований перешла в равносильную ей систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ \quad\; x_2 + 10x_3 = 9, \\ \qquad\quad x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 + 3x_2 + 4x_3, \\ x_2 = 9 - 10x_3, \\ x_3 = -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Отметим, что решения системы, полученные в пунктах *а*), *б*) и *в*), как и следовало ожидать, совпадают.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

2. Элементы векторной алгебры в R_3

Трехмерное векторное пространство R_3 есть частный случай R_n при $n = 3$. Декартов прямоугольный базис в R_3 образуют три единичных, взаимно перпендикулярных вектора

$$\bar{i} = \bar{e}_1 = (1,0,0),$$
$$\bar{j} = \bar{e}_2 = (0,1,0),$$
$$\bar{k} = \bar{e}_3 = (0,0,1).$$

Совокупность начала координат (точки O) и декартова прямоугольного базиса называется декартовой прямоугольной системой координат $OXYZ$.

Согласно формуле (9) любой вектор $\bar{a}$ в R_3 можно разложить единственным образом по $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, т. е. представить в виде:

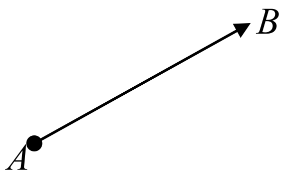
$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$$

где a_x — координата вектора по оси OX;

a_y — координата вектора по оси OY;

a_z — координата вектора по оси OZ.

Наряду с аналитическим заданием вектора как упорядоченной тройки чисел в R_3 рассматривают вектор как направленный отрезок, имеющий начало и конец. Конец вектора отмечается стрелкой.



$\bar{a} = \overline{AB}$

A — начало вектора,

B — конец вектора.

Длина отрезка AB называется *модулем вектора* и обозначается $|\bar{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

Если известны координаты вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, то модуль вектора вычисляется по формуле:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.1)$$

Радиусом-вектором точки в декартовой прямоугольной системе координат называется вектор, начало которого расположено в начале координат, а конец в данной точке A, т. е. вектор $\overline{OA}$.

Координатами точки A называются координаты её радиуса-вектора. Если $\overline{OA} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, то (a_x, a_y, a_z) координаты точки A.

Пусть вектор $\bar{a} = \overline{AB}$, причём заданы координаты точек A и B: $A(a_x, a_y, a_z)$ и $B(b_x, b_y, b_z)$. Тогда координаты вектора $\overline{AB}$ равны разности одноимённых координат конца и начала:

$$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z). \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) следует формула для расстояния между двумя точками A и B:

$$AB = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\left(b_x - a_x\right)^2 + \left(b_y - a_y\right)^2 + \left(b_z - a_z\right)^2}. \tag{2.3}$$

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число (скаляр), обозначаемое $\left(\bar{a}, \bar{b}\right)$, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними:

$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = |\bar{a}|\left|\bar{b}\right|\cos\varphi, \tag{2.4}$$

где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

В декартовой прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \tag{2.5}$$

(a_x, a_y, a_z) — координаты вектора $\bar{a}$;

(b_x, b_y, b_z) — координаты вектора $\bar{b}$.

Из (2.4) и (2.5) получается формула для вычисления косинуса угла между двумя векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\bar{a}, \bar{b}\right)}{|\bar{a}|\left|\bar{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{2.6}$$

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *ортогональными* (обозначаются $\bar{a} \perp \bar{b}$), если угол φ между ними равен прямому, т. е. $\cos\varphi = 0$. Условие ортогональности векторов:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{2.7}$$

Упорядоченная тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется *правой*, если из конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$ ко второму $\bar{b}$ виден происходящим против часовой стрелки и называется *левой*, если такой поворот происходит по часовой стрелке.

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \left[\bar{a}, \bar{b}\right]$, такой что:

1) $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$, т. е. $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) направлен так, что тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — правая;

3) модуль вектора $\bar{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, как на сторонах, т. е.

$$|\bar{c}| = S_{\square} = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi. \tag{2.8}$$

Если $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то для векторного произведения справедлива формула:

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число (обозначаемое $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$), равное скалярному произведению векторного произведения первых двух векторов на третий:

$$\left(\left[\bar{a}, \bar{b}\right], \bar{c}\right) = \left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right).$$

Смешанное произведение векторов по абсолютной величине равно объему параллелепипеда $V_{\text{пар}}$, построенного на этих векторах как на сторонах, т. е.

$$V_{\text{пар}} = \left|\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right)\right|. \tag{2.10}$$

Если $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то справедлива формула:

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.11}$$

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых. Условие коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

1) в векторной форме $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, где λ — скаляр;

2) в координатной форме $$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda. \tag{2.12}$$

Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называются *компланарными*, если они лежат в одной или параллельных плоскостях. Условие компланарности трёх векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

1) в векторной форме: $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$, где λ, μ — числа;

2) в координатной форме: $$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (22)$$

Пример 2. Даны координаты вершин треугольной пирамиды: A_1 (–1, 0, 1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (0, –2, 2), A_4 (1, –1, 5).

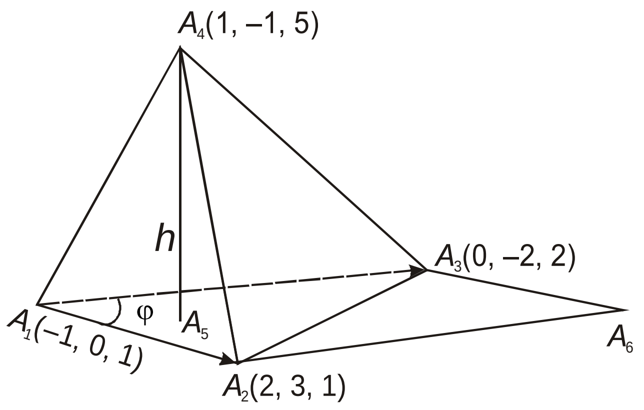


Рис. 1

Требуется найти:

а) длины рёбер A_1A_2 и A_1A_3;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3;

в) площадь грани $A_1A_2A_3$;

г) объём пирамиды $A_1A_2A_3\,A_4$.

а) Используем формулы (2.2) и (2.3).

Определим координаты векторов:

$\overline{A_1A_2} = (2-(-1),\ 3-0,\ 1-1) = (3,\ 3,\ 0),$

$\overline{A_1A_3} = (0-(-1),\ -2-0,\ 2-1) = (1,\ -2,\ 1).$

Ребро $A_1A_2 = \left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ед.,

$$A_1A_3 = \left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{18} = \sqrt{6} \text{ ед.}$$

б) Угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_3 рассматриваем как угол между векторами $\overline{A_1A_2} = (3,\ 3,\ 0)$ и $\overline{A_1A_3} = (1,\ -2,\ 1)$.

По формуле (2.6) для косинуса угла между двумя векторами получим:

$$\cos\varphi=\frac{\left(\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3}\right)}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{A_1A_3}\right|}=\frac{3\cdot1+3(-2)+0\cdot1}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{3-6+0}{3\sqrt{12}}=\frac{-3}{6\sqrt{3}}=\frac{-3}{2\sqrt{3}},$$

$$\varphi=\pi-\arccos\frac{3}{2\sqrt{3}}.$$

в) Грань $A_1A_2A_3$ есть треугольник, площадь которого равна половине площади параллелограмма $A_1A_2A_6A_3$, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$. По формуле (2.8): $S_{\square}=\left|\left[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}\right]\right|$.

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$ по формуле (2.9):

$$\left[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=i\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}3 & 3\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(3\cdot1-(-2)0\right)i-\left(3\cdot1-1\cdot0\right)j+\left(3\cdot(-2)-1\cdot3\right)k=3i-3j-9k.$$

$$S_{\square}=\left|\left[\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3}\right]\right|=\sqrt{3^2+(-3)^2+(-9)^2}=\sqrt{9+9+81}=\sqrt{99}=3\sqrt{11}\text{ ед}^2.$$

$$S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}S_{\square}=\frac{3\sqrt{11}}{2}\text{ ед}^2.$$

г) Объём треугольной пирамиды $V_{\text{пир}}$ равен 1/6 объёма параллелепипеда $V_{\text{пар}}$, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$ как на сторонах. Из свойств смешанного произведения следует, что:

$V_{\text{пар}}=\left|\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|$, и следовательно,

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}\right)\right|.$$

Определим координаты вектора

$$\overline{A_1A_4}=(1-(-1),-1-0,\ 5-1)=(2,\ -1,\ 4).$$

По формуле (2.11) имеем

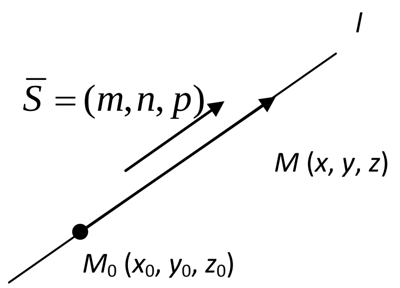
$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-8-(-1)-3(4-2)+0 = 3(-7)-3 \cdot 2 = -27.$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|-27\right| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ ед}^3.$$

3. Элементы аналитической геометрии в R_3

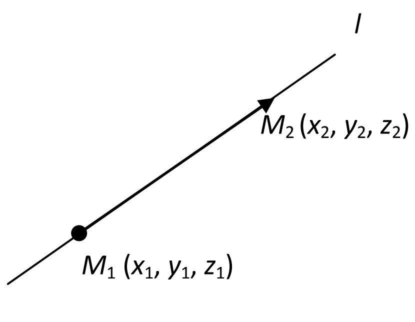
Направляющим вектором прямой называется любой вектор $\overline{S}$, лежащий на этой прямой или ей параллельной и отличный от нуль-вектора, т. е. $\overline{S} \parallel l$ и $\overline{S} \neq \overline{0}$.



Канонические уравнения прямой, проходящей через данную точку M_0 с данным направляющим вектором $\overline{S}$, имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \qquad (3.1)$$

где (x, y, z) — координаты текущей точки прямой; (x_0, y_0, z_0) — координаты данной точки на прямой; (m, n, p) — координаты направляющего вектора прямой.



Если на прямой заданы две точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, то в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\overline{M_1M_2}$:

$$\overline{S} = \overline{M_1M_2} = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1).$$

Рассматривая в качестве данной точки точку M_1 и используя уравнение (3.1), получим уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (3.2)$$

Пусть прямая l_1 имеет направляющий вектор $\bar{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и прямая l_2 — направляющий вектор $\bar{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Угол φ между прямыми l_1 и l_2 определяется как угол между их направляющими векторами $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$, по формуле (2.6) получаем:

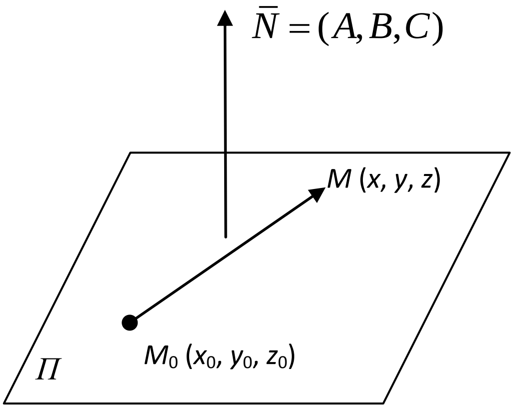
$$\cos\varphi = \frac{\left(\bar{S}_1, \bar{S}_2\right)}{\left|\bar{S}_1\right|\left|\bar{S}_2\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

$l_1 \parallel l_2$, если $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$, т. е. по условию коллинеарности (2.12)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Критерий перпендикулярности прямых $l_1 \perp l_2$ <=> $\bar{S}_1 \perp \bar{S}_2$. Тогда по условию ортогональности векторов (1.7) $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Нормальным вектором плоскости (*П*) называется любой вектор $\bar{N}$, перпендикулярный к плоскости и отличный от нуль-вектора: $\bar{N} \perp П$ и $\bar{N} \neq \bar{0}$.



Уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 плоскости и имеющей данный нормальный вектор $\bar{N}$, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (3.3)$$

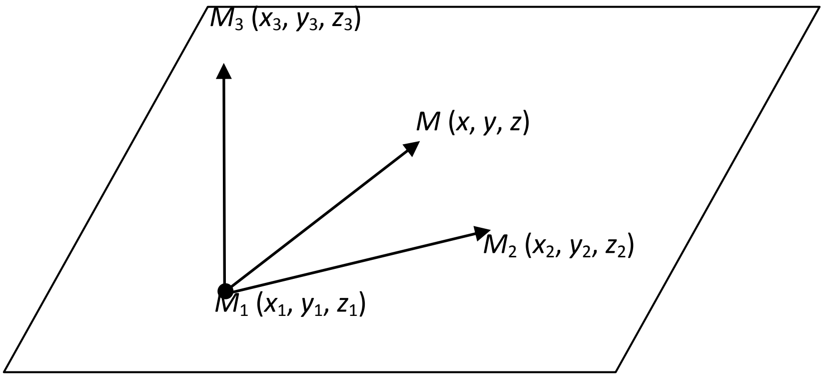
где A, B, C — координаты нормального вектора $\bar{N}$;

x_0, y_0, z_0 — координаты данной точки плоскости;

x, y, z — координаты текущей точки плоскости.

Если в уравнении (3.3) раскрыть скобки, то его можно записать в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3.4)$$



Уравнение (3.4) называется *общим уравнением плоскости*.

Три точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $M_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$ (не лежащие на одной прямой) определяют плоскость в R_3. Уравнение такой плоскости можно получить из условия компланарности (2.13) трёх векторов:

$$\overline{M_1M} = (x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1),$$
$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1),$$
$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1),$$

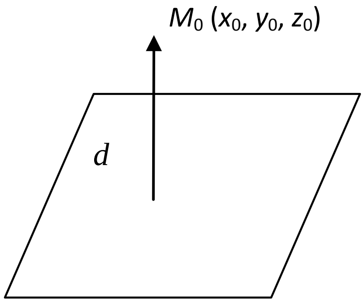
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

Здесь x, y, z — координаты текущей точки M;

x_1, y_1, z_1 — координаты данной точки M_1;

x_2, y_2, z_2 — координаты данной точки M_2;

x_3, y_3, z_3 — координаты данной точки M_3.



Пусть плоскость П задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Расстояние от точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости П вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.6}$$

Угол между двумя плоскостями, нормальные векторы которых $\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, вычисляется по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\bar{N}_1, \bar{N}_2\right)}{|\bar{N}_1||\bar{N}_2|}.$$

Критерий параллельности плоскостей:

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2, \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

Критерий перпендикулярности плоскостей:

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \bar{N}_1 \perp \bar{N}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Угол между прямой и плоскостью ψ определяется как дополнительный к углу φ между направляющим вектором прямой $\vec{S} = (m, n, p)$ и вектором нормали к плоскости $\bar{N} = (A, B, C),$ таким образом $\psi = 90^0 - \varphi$ и получаем:

$$\sin\psi = \cos\varphi = \frac{\left(\vec{S}, \vec{N}\right)}{\left|\vec{S}\right| \cdot \left|\vec{N}\right|}. \qquad (3.7)$$

Пример 2 (продолжение). Даны координаты вершин треугольной пирамиды

A_1 (–1, 0, 1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (0, –2, 2), A_4 (1, –1, 5). Продолжение задания 5 пункты д—з.

Требуется найти:

д) канонические уравнения прямой l, проходящей через точки A_1 и A_4;

е) уравнение плоскости П, проходящей через точки A_1, A_2, и A_3;

ж) угол между прямой l и плоскостью П;

з) высоту пирамиды.

***Решение*:**

д) Для нахождения канонических уравнений прямой A_1A_4 используем уравнение (3.2) прямой, проходящей через две точки A_1 (–1, 0,1) и A_4 (1,–1,5):

$$A_1A_4\text{:}\ \frac{x-(-1)}{2-1} = \frac{y-0}{3-(-1)} = \frac{z-1}{1-5} \text{ или } \frac{x+1}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-4}.$$

е) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ получим, используя уравнение плоскости (3.5), проходящей через три данные точки A_1 (–1, 0, 1), A_2 (2, 3, 1), A_3 (0, –2, 2):

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-0 & z-1 \\ 2-(-1) & 3-0 & 1-1 \\ 0-(-1) & -2-0 & 2-1 \end{vmatrix}=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Раскладывая определитель по элементам первой строки, получим:

$$(x+1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3(x+1)-3y-9(z-1)=0.$$

Делим все члены уравнения на 3 и раскрываем скобки:

$x+1-y-3z+3=0.$

Окончательно уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид:

$x-y-3z+4=0.$

ж) Угол между прямой l и плоскостью П найдём по формуле (3.7). Уравнение прямой l получено в пункте д) и имеет вид $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z-1}{-4}$, Координаты направляющего вектора – это числа в знаменателях, следовательно: $\vec{S}=(1,4,-4)$. Уравнение плоскости П получено в пункте е) и имеет вид $x-y-3z+4=0$. Следовательно, нормальный вектор плоскости $\bar{N}$ имеет координаты равные коэффициентам при x, y, z в уравнении плоскости, т. е. $\bar{N}=(1,-1,-3)$.

Используем формулу (3.7):

$$\sin\psi=\frac{1\cdot1+4\cdot(-1)-4\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+4^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\frac{9}{\sqrt{33}\sqrt{11}}=\frac{9}{11\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \psi=\arcsin\frac{9}{11\sqrt{3}}.$$

з) Высоту пирамиды (отрезок A_4A_5 (рис. 1)) можно определить как расстояние точки A_4 (1, –1, 5) до плоскости $A_1A_2A_3$ по формуле (3.6).

$A_1A_2A_3$: $x-y-3z+4=0.$

Точка A_4 (1, –1, 5).

В уравнение плоскости вместо x, y, z подставим координаты A_4 и поделим $\left|\bar{N}_1\right|$.

$$h=A_4A_5=\frac{\left|1-(-1)-3\cdot5+4\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-3)^2}}=\frac{\left|1+1-15+4\right|}{\sqrt{11}}=\frac{\left|-9\right|}{\sqrt{11}}=\frac{9}{\sqrt{11}}.$$

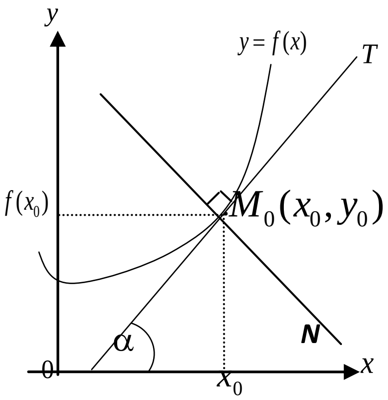
4. Производная функции и её приложения

Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (4.1)$$

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*. Правила дифференцирования и таблица производных основных элементарных функций представлены в Приложении 1.



Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (прямая M_0T) имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad (4.2)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (4.3)$$

Механический смысл производной. Если точка движется по закону $S=s(t)$, где S — путь, t — время, то $S'(t)$ представляет скорость движения точки в момент времени t, т. е. $S'(t) = V(t)$.

Дифференциал первого порядка функции $y = y(x)$ определяется формулой:

$$dy = y'(x)dx, \qquad (4.4)$$

т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной. Из формулы (4.4) вытекает еще одна форма записи производной в виде $\dfrac{dy}{dx}$.

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции. Например, производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Задание 3.
3.1. Найти производные 1-го порядка функций *а*), *б*), *в*), и *г*);
3.2. Найти производную 2-го порядка функции *а*)
3.3. Записать дифференциал первого порядка функции а)

$$а)\ y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3};\ б)\ s = (e^t - 2\ln t)\sin t;\ в)\ u = \mathrm{ctg}^3\frac{v}{3};\ г)\ z = \frac{\mathrm{arctg}2t}{1+4t^2}.$$

Решение.

3.1 *а*) Используя правила I, III и формулу 3 таблицы производных, получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$
$$= 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы 5, 7, 8 (Прил.1) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t'=1, получим:

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$
$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v'=1; используя формулы 3, 11 и 2 (Прил.1) получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$

$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы 3 и 14 (Прил.1), учитывая, что $t'=1$, получим:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

3.2 В пункте 3.1 *а*) нашли производную 1-го порядка данной функции:

$$y' = 15x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} + 12x^{-4}.$$

Найдём производную второго порядка $y'' = (y')'$:

$$y'' = \left(15x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} + 12x^{-4}\right)' = 15(x^4)' + \frac{2}{3}(x^{-1/3})' + 12(x^{-4})' =$$

$$= 15\cdot 4x^3 + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3} + 12(-4x^{-5}) = 60x^3 - \frac{2}{9x\sqrt[3]{x}} - \frac{60}{x^5}.$$

3.3 Запишем дифференциал функции *а*). Согласно формуле (5.4) получим:

$$dy = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3})'dx \quad \Rightarrow \quad dy = (15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4})dx.$$

Использовали результат нахождения производной функции *а*) в пункте 3.1

Задание 4. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = \sqrt{x^2 - 3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Используем уравнения касательной (4.2) и нормали (4.3):

1) $y(x_0) = y(2) = \sqrt{2^2 - 3} = 1;$

2) $y'(x) = ((x^2-3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$

$$y'(x_0) = y'(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2-3}} = 2.$$

Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения и получим: $y = 1 + 2(x-2)$, или $2x - y - 3 = 0$ — уравнение касательной.

$y = 1 - \frac{1}{2}(x-2)$, или $x + 2y - 4 = 0$ — уравнение нормали.

5. Краткие сведения из теории пределов функции

Число A называют *пределом функции* $f(x)$ при $x \to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.ф.) при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0\right)$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.ф.) при $x \to x_0$, ($x \to \infty$), если для любого M>0 найдётся число $\delta > 0$, зависящее от M, такое, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство $|f(x)| > M$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty\right)$.

Если $\alpha(x)$ есть б. м.ф. при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$), то функция $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ является б. б., и обратно, если $f(x)$ б.б.ф. при $x \to x_0$, то $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ является б.м.ф.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ б.м.ф. при $x \to x_0$ ($x \to \infty$), то чтобы сравнить их, нужно вычислить предел их отношения. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k.$ Тогда:

при $k = 0$ $\alpha(x)$ называется б.м. более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$;

при $0 < k < \infty$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости;

при $k = \infty$ $\alpha(x)$ более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$.

Если $k = 1$, то б.м.ф. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*: $\alpha(x) \sim \beta(x).$

Предел отношения двух б.м.ф. не изменится, если каждую б.м.ф. заменить на эквивалентную.

Примеры эквивалентных б.м.ф. при $\alpha(x) \to 0$:

$$\alpha(x) \sim \sin\alpha(x) \sim \mathrm{tg}\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim$$
$$\sim \mathrm{arctg}\alpha(x) \sim e^{\alpha(x)} - 1 \sim a^{\alpha(x)} - 1 \sim \ln a \sim \ln(1 + \alpha(x)).$$

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c=const).

2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,$ $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B,$ то:

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \pm B;$$

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Второй замечательный предел (число $e = 2{,}718\ldots$):

$$\lim_{x \to \infty}(1 + 1/x)^x = e \text{ или } \lim_{y \to 0}(1 + y)^{1/y} = e.$$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x),$ нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если x=x_0

принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c = \text{const}$, $c \neq 0$, $c \neq \infty$, то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$\frac{0}{c} \to 0$; $\frac{c}{0} \to \infty$; $\frac{\infty}{c} \to \infty$; $c \cdot \infty \to \infty$; $c \cdot 0 \to 0$; $a^{\infty} \to 0$, если $0 < a < 1$; $a^{\infty} \to \infty$, если $a > 1$.

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \left(\frac{0}{0}\right);\ (0 \cdot \infty);\ (\infty - \infty);\ (1^{\infty});\ (\infty^{0});\ (0^{0}).$$

Устранить неопределенность можно с помощью алгебраических преобразований или используя правило Лопиталя.

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (5.1)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5.1).

Задание 5. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

$$а)\ \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 2x - 3}{x^2 + 6};\quad б)\ \lim_{x \to -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x^2 + 5x - 14};\quad в)\ \lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 + x}}{\mathrm{tg}\,5x}.$$

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо x предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3+2x-3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\infty\cdot 4=\infty,\ \text{т. к. } \frac{2}{x^2}\to 0,\ \frac{3}{x^3}\to 0.$$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+6)=\infty.$

Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2}=\lim_{x\to\infty}12x=\infty.$$

б) $$\lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to-7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'}=\lim_{x\to-7}\frac{4x+15}{2x+5}=\lim_{x\to-7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5}=\frac{-13}{-9}=\frac{13}{9}.$$

в) $$\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4+x}}{\mathrm{tg}5x}=\lim_{x\to0}\frac{2-\sqrt{4+0}}{\mathrm{tg}(5\cdot0)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(2-\sqrt{4+x})'}{(\mathrm{tg}5x)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(4+x)^{-1/2}}{\dfrac{5}{\cos^2 5x}}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos^2 5x}{10\sqrt{4+x}}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos^2(5\cdot0)}{10\sqrt{4+0}}=\frac{-1}{20}.$$

Замечание. Если, применив правило Лопиталя, снова получили неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, то снова применяем правило до тех пор, пока неопределённость не будет раскрыта.

6. Исследование функций и построение графиков

Приведём общую схему исследования и построения графика функции.

1. **Область определения функции (о.о.ф.)**. *Областью определения D(f) функции* $y=f(x)$ называется множество всех $x\in X$ таких, что выражение $f(x)$ имеет смысл, т. е. взяв любое $x\in X$ и подставив в $f(x)$ можно найти соответствующее значение функции $f(x)$.

2. **Область непрерывности функции.** Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она: 1) определена в точке x_0; 2) имеет конечный предел при $x\to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в этой

точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. Функция называется непрерывной на некотором промежутке *X*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Точка x_0 называется точкой разрыва функции, если в этой точке не выполнено хотя бы одно из условий 1—3 непрерывности функции. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

3. <u>Чётность, нечётность функции.</u> Функция $y=f(x)$ называется *чётной*, если $f(-x)=f(x)$, её график симметричен относительно оси *OY*. Функция $y=f(x)$ называется *нечётной*, если $f(-x)=-f(x)$, её график симметричен относительно начала координат. Остальные функции называются *функциями общего вида*.

4. <u>Точки пересечения графика функции с осями координат.</u> Пересечение с осью *OY* $\begin{cases} y=f(x) \\ x=0 \end{cases}$; пересечение с осью *OX* $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0. \end{cases}$

5. <u>Асимптоты графика функции.</u> Асимптотой кривой $y=f(x)$ называется прямая *l*, такая, что расстояние точки $(x, f(x))$ от этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки по кривой от начала координат. Различают вертикальные и наклонные асимптоты. Прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если x_0 есть точка бесконечного разрыва функции, т. е. если хотя бы один из односторонних пределов функции $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\pm\infty$. Прямая $y=kx+b$ есть наклонная асимптота графика функции $y=f(x)$, если $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-x]$, причем оба предела существуют и конечны.

6. <u>Интервалы монотонности и точки локального экстремума функции</u>. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на (*a*, *b*) ($f(x)\nearrow$), если для $x_2>x_1\in(a,b)$ $f(x_2)>f(x_1)$. Функция $f(x)$ называется *убывающей* на (*a*, *b*) ($f(x)\searrow$), если для $x_2>x_1\in(a,b)$ $f(x_2)<f(x_1)$. Функция называется монотонной на (*a*, *b*), если $f(x)$ только $\nearrow$ или только $\searrow$ на (*a*, *b*). Если для всех

$x \in (a,b)\ f'(x) > 0,$ то $f(x) \nearrow$ на $(a,\ b)$. Если для всех $x \in (a,b)\ f'(x) < 0,$ то $f(x) \searrow$ на $(a,\ b)$. Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума (max), [минимума (min)] функции $f(x)$, если существует некоторый интервал (α, β), содержащий точку x_0 такой, что для всех $x \in (\alpha, \beta)$ $f(x) < f(x_0)$ $[f(x) > f(x_0)]$ $(x \in (\alpha, \beta)\ x \neq x_0)$. Точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума функции.

Необходимое условие экстремума. Если x_0 точка локального экстремума непрерывной функции $f(x)$, то её первая производная $f'(x)$ в точке x_0 или равна нулю, или не существует.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует, называются *критическими точками*.

Первое достаточное условие экстремума: если при переходе через критическую точку x_0 знак $f'(x)$ изменился с «+» на «–», то в точке x_0 локальный максимум;

с «–» на «+», то в точке x_0 локальный минимум;

если знак $f'(x)$ не изменился, то в точке x_0 экстремума нет.

7. **Интервалы выпуклости функции, точки перегиба.** Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* $(\cap)$ [*вниз* $\cup$] на интервале $(a,\ b)$, если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполняется неравенство:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}; \left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right].$$

Точки, разделяющие интервалы выпуклости, называются *точками перегиба*.

Если $f''(x) > 0$ всюду на $(a,\ b)$, то функция $f(x)$ выпукла вниз ($\cup$) на $(a,\ b)$.

Если $f''(x) < 0$ всюду на $(a,\ b)$, то функция $f(x)$ выпукла вверх $(\cap)$ на $(a,\ b)$.

8. **Построение графика**. Для построения графика можно взять несколько дополнительных точек.

Задание 6. Построить график функции $y = x^3 + 3x^2 + 1,$ используя общую схему исследования функции.

Решение.

1. Функция $\underline{y = x^3 + 3x^2 + 1.}$ определена для любого *x*, т.е. о.о.ф. $D(y) = \mathrm{R}$, $x \in \mathrm{R}$ или $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. Так как функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ определена на всей числовой оси, то она и непрерывна для любого $x \in (-\infty; +\infty)$. Точек разрыва нет.

3. $\begin{cases} f(-x) = (-x)^3 + 3x^2 + 1 \neq f(x) \\ -f(x) = -x^3 - 3x^2 - 1 \neq f(-x) \end{cases} \Rightarrow f(x) -$ функция общего вида.

4. $\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,1);$ $\begin{cases} y = x^3 + 3x^2 + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 1 = 0.$

Точки пересечения с осью *OX* искать не будем, поскольку для этого необходимо решать кубическое уравнение.

5. Т. к. функция $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ не имеет точек разрыва, то вертикальных асимптот у графика функции нет. Найдём наклонные асимптоты:

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} [x^2 + 3x + 1/x] = (\infty + \infty + 0) = \infty.$ Наклонных асимптот нет.

6. Определим критические точки: $\begin{aligned} &f'(x) = 3x^2 + 6x \\ &f'(x) = 0.\ 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0\ \ x_2 = -2. \end{aligned}$

О.о.ф. найденными критическими точками разбиваем на интервалы и определяем знак $y'(x)$ внутри каждого интервала:

$y'(-3) = 3\cdot(-3)(-3+2) = 9 > 0;\ y'(-1) = 3\cdot(-1)(-1+2) = -3 < 0;\ y'(1) = 3\cdot1(1+2) = 9 > 0.$

Результаты оформим в виде таблицы:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0, +\infty)$
$y'(x)$	+	0	–	0	+
$y(x)$	$\nearrow$	$\nearrow\searrow$ max	$\searrow$	$\searrow\nearrow$ min	$\nearrow$

$y_{\max} = y(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 1 = 5;\ y_{\min} = y(0) = 1.$

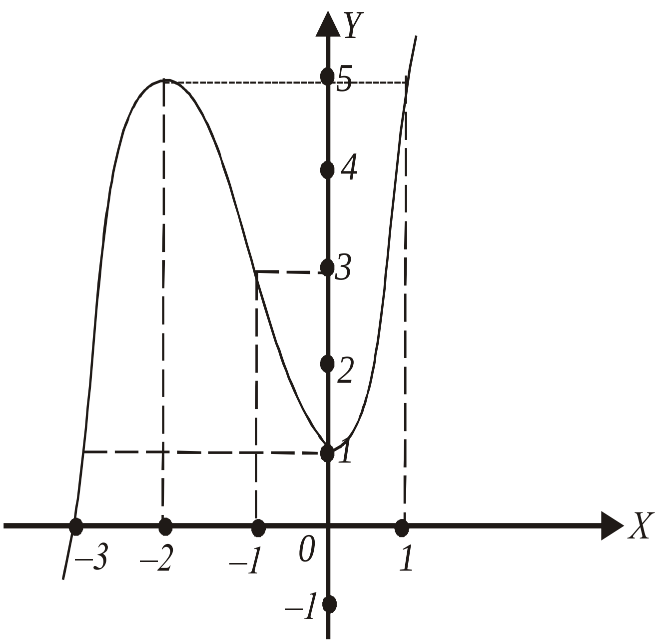
7. Определим точки, подозрительные на перегиб: $y'' = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6;$
$y'' = 0. \quad 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1.$

О.о.ф. найденными точками разбиваем на интервалы, определяем знак $f''(x)$ внутри каждого интервала: $y''(-2) = 6(-2) + 6 = -6 < 0; y''(0) = 6 > 0.$ Результаты оформим в виде таблицы:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
$y''(x)$	$-$	0	+
$y(x)$	$\cap$	$\cup\cap$	$\cup$

$y_{\text{пер}} = y(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 1 = 3.$

8. Построим график функции, учитывая все полученные данные, также используем две дополнительные точки (–3,1), (1, 5).



7. Функция нескольких переменных. Частные производные

Переменная величина *z* называется *функцией двух* независимых *переменных* *x* и *y*: *z* = *f* (*x*, *y*) (или функцией точки $M(x, y)$: *z* = *f* (*M*)), заданной на множестве *D*, если по некоторому закону каждой паре $(x, y) \in D$ (каждой точке $M \in D$) соответствует определенное значение *z*.

Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде $z = f\,(x, y)$ или $z = f\,(M)$, или $z = z\,(x, y)$. Множество D называется *областью определения* функции $f\left(x, y\right)$ и обозначается $D\,(f)$. Она находится из двух условий:

1) В множество D включаются все точки плоскости OXY, где выражение $f\left(x, y\right)$ определено, т. е. имеет смысл.

2) Если функция $f\left(x, y\right)$ получена для некоторой физической задачи, то учитывается смысл переменных x и y.

Пусть функция $z = f\,(x, y)$ определена в области $D \subset \mathbb{R}^2$ и $M_0\,(x_0, y_0) \in D$.

Дадим аргументу x произвольное приращение Δx и аргументу y — приращение Δy так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$.

Полным приращением функции $z = f\,(x, y)$ в точке $M_0\,(x_0, y_0)$ называется разность $\Delta z = f\,(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f\,(x_0, y_0)$.

Частные приращения функции $f\,(x, y)$ по переменным x и y равны соответственно:

$$\Delta_x z = f\,(x_0 + \Delta x, y_0) - f\,(x_0, y_0), \quad y = y_0 = \mathrm{const},$$

$$\Delta_y z = f\,(x_0, y_0 + \Delta y) - f\,(x_0, y_0), \quad x = x_0 = \mathrm{const}.$$

Частными производными функции $z\,(x, y)$ в точке (x_0, y_0) по x и по y называются пределы вида:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y},$$

если они существуют и конечны.

Другие обозначения частных производных функции $z = f\left(x, y\right)$:

$$z'_x,\ z'_y \ \text{ или } \ f'_x,\ f'_y, \text{ или } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Если необходимо, в скобках указывается точка (x_0, y_0), в которой вычислены частные производные:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} \ \text{ или } \ z'_x(x_0, y_0) \ \text{ и т. д.}$$

Из определения частных производных следует правило их нахождения: частная производная по x есть обыкновенная производная по x функции $f(x, y)$, вычисленная при условии, что y = const. При этом используются правила и формулы дифференцирования функции одной переменной (Прил. 1).

Аналогично, если $u = u(x, y, z)$, то u'_x вычисляют при y, z = const, u'_y — при x, z = const, u'_z при x, y = const.

Задание 7. Найти частные производные первого порядка функций

$$a)\ z = x^4 \cdot \sqrt{xy} - \frac{x}{y^2};\quad б)\ z = \sin^2 x \cdot e^{x-y};\quad в)\ u = \frac{\sqrt{y^2 - 2x}}{\cos 3z}.$$

Решение.

$a)\ z = x^4 \cdot \sqrt{xy} - \frac{x}{y^2}$, $z'_x = ?$ $z'_y = ?$ Функцию z запишем в виде, удобном для дифференцирования: $z = x^4 x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2} = x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2}$.

Используя правила I, III и формулу 3 (Прил.1), дифференцируем по x, считая y = const:

$$z'_x = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2})'_x = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}})'_x - (xy^{-2})'_x = y^{\frac{1}{2}} (x^{\frac{9}{2}})'_x - y^{-2}(x)'_x =$$

$$= y^{\frac{1}{2}} \frac{9}{2} x^{\frac{7}{2}} - y^{-2} = \frac{9}{2}\sqrt{x^7 y} - \frac{1}{y^2}.$$

Дифференцируем по y (x = const):

$$z'_y = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}} - xy^{-2})'_y = (x^{\frac{9}{2}} y^{\frac{1}{2}})'_y - (xy^{-2})'_y = x^{\frac{9}{2}} (y^{\frac{1}{2}})'_y - x(y^{-2})'_y =$$

$$= x^{\frac{9}{2}} \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - x(-2)y^{-3} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^9}{y}} + \frac{2x}{y^3}.$$

$б)\ z = \sin^2 x \cdot e^{x-y}$.

Используем правило II и формулы 3, 5, 8 (Прил.1), считая $y = \text{const}$:

$$z'_x = (\sin^2 x \cdot e^{x-y})'_x = (\sin^2 x)'_x e^{x-y} + \sin^2 x (e^{x-y})'_x = 2\sin x \cos x e^{x-y} +$$

$$+\sin^2 x e^{x-y}(x-y)'_x = 2\sin x \cos x \cdot e^{x-y} + \sin^2 x e^{x-y} \cdot 1 = \sin 2x e^{x-y} +$$

$$+\sin^2 x \cdot e^{x-y}.$$

При вычислении z'_y можно использовать правило $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, так как множитель $\sin^2 x$ — постоянная величина при x= const:

$$z'_y = (\sin^2 x \cdot e^{x-y})'_y = \sin^2 x (e^{x-y})'_y = \sin^2 x \cdot e^{x-y} (x-y)'_y = \sin^2 x \cdot e^{x-y}(-1) =$$
$$= -\sin^2 x \cdot e^{x-y}.$$

в) $u = \dfrac{\sqrt{y^2 - 2x}}{\cos 3z}, \quad u'_x = ? \quad u'_y = ? \quad u'_z = ?$

При дифференцировании по x считаем y, z = const, следовательно, у дроби знаменатель постоянный и используем правило $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$:

$$u'_x = \left(\frac{(y^2 - 2x)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z} \right)'_x = \frac{\left((y^2 - 2x)^{\frac{1}{2}} \right)'_x}{\cos 3z} = \frac{\frac{1}{2}(y^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}} (y^2 - 2x)'_x}{\cos 3z} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(y^2 - 2x)^{-\frac{1}{2}}(-2)}{\cos 3z} = -\frac{1}{\cos 3z \sqrt{y^2 - 2x}}.$$

Аналогично при дифференцировании по y считаем x, z = const:

$$u'_y = \left(\frac{\left(y^2 - 2x\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z} \right)'_y = \frac{\left(\left(y^2 - 2x\right)^{\frac{1}{2}} \right)'_y}{\cos 3z} = \frac{\frac{1}{2}\left(y^2 - 2x\right)^{-\frac{1}{2}} \left(y^2 - 2x\right)'_y}{\cos 3z} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\left(y^2 - 2x\right)^{-\frac{1}{2}} 2y}{\cos 3z} = \frac{y}{\cos 3z \sqrt{y^2 - 2x}}.$$

Дифференцируя функцию по z, считаем x, y = const, следовательно, числитель дроби постоянный и можно использовать правило V:

$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$. Имеем:

$$u'_z=\left(\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos 3z}\right)'_z=-\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\cos 3z\right)'_z}{\left(\cos 3z\right)^2}=-\frac{\left(y^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\sin 3z\right)\cdot 3}{\left(\cos 3z\right)^2}=$$

$$=\frac{3\sqrt{y^2-2x}\sin 3z}{\left(\cos 3z\right)^2}\ .$$

8. Градиент скалярного поля и производная по направлению

Пусть D некоторая область в пространстве $\mathbb{R}^3$. Если в ней задана функция $u=u\ (x,\ y,\ z)$, то говорят, что в области D задано *скалярное поле*, а функция $u=u\ (x,\ y,\ z)$ называется функцией скалярного поля. Например, u — температура в точках $M\in D$ (поле температур), или u — давление жидкости или газа в точках сосуда D (поле давлений). При изучении скалярного поля важно иметь информацию о скорости изменения величины поля в том или ином направлении. Такую информацию дает производная по направлению. Наряду с ней рассматривают в каждой точке $M_0\in D$ вектор с координатами $\left(u'_x\left(M_0\right),u'_y\left(M_0\right),u'_z\left(M_0\right)\right)$, называемый *градиентом* функции $u=u\left(M\right)$в точке M_0. Вектор градиента обозначается $\operatorname{grad}u\left(M_0\right)$:

$$\operatorname{grad}u\left(M_0\right)=u'_x\left(M_0\right)\overline{i}+u'_y\left(M_0\right)\overline{j}+u'_z\left(M_0\right)\overline{k}, \qquad (8.1)$$

где $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — единичные векторы декартова прямоугольного базиса.

Вектор grad u (M_0) указывает направление, в котором функция u(M) в точке M_0 возрастает с максимальной скоростью. Максимальная величина скорости равна:

$$\left|\operatorname{grad} u\left(M_0\right)\right|=\sqrt{\left(u'_x\left(M_0\right)\right)^2+\left(u'_y\left(M_0\right)\right)^2+\left(u'_z\left(M_0\right)^2\right)}. \qquad (8.2)$$

Вектор $\operatorname{grad}u\left(M_0\right)$ (если он ненулевой) направлен по нормали к поверхности уровня функции $u=u\left(M\right)$, определяемой уравнением $u\left(x,y,z\right)=u\left(M_0\right)$ и проходящей через точку $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$.

Пусть функция скалярного поля $u = u(M)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки $M_0 \in D \subset \mathbb{R}^3$ и $\bar{S}$ — какой-либо фиксированный вектор в $\mathbb{R}^3$.

Производной функции $u = u(M)$ в точке M_0 в *направлении вектора* $\bar{S}$ называется предел отношения приращения функции u в точке M_0 в направлении вектора $\bar{S}$ $\left(\Delta_{\bar{S}} u = u(M) - u(M_0)\right)$ к расстоянию между точками M и M_0 $\left(\rho(M, M_0)\right)$, когда точка $M \to M_0$ так, что вектор $\overline{M_0 M}$ остается сонаправленным данному вектору $\bar{S}$, т. е.:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\rho(M, M_0)},$$

если этот предел существует и конечен.

Если вектор $\bar{S}$ задан координатами, т. е. $\bar{S} = (S_x, S_y, S_z)$ и функция $u = u(M)$ дифференцируема в точке M_0, то производная по направлению вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M_0) = u'_x(M_0)\cos\alpha + u'_y(M_0)\cos\beta + u'_z(M_0)\cos\gamma, \tag{8.3}$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\bar{S}$. Они равны

$$\cos\alpha = \frac{S_x}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}}, \cos\beta = \frac{S_y}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}}, \cos\gamma = \frac{S_z}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}}. \tag{8.4}$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)$ характеризует скорость изменения функции $u(M)$ в точке M_0 в направлении данного вектора $\bar{S}$. Если $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0) > 0$, то функция возрастает в направлении $\bar{S}$ со скоростью $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)$; при $\frac{\partial u}{\partial s}(M_0) < 0$ функция убывает со скоростью $\left|\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)\right|$.

Задание 8. Дана функция скалярного поля $u = y^2 z + 3z^2 - 4xyz$. Найти:

а) градиент функции u точке $M_0(3,1,1)$, модуль градиента и объяснить физический смысл полученного результата;

б) производную функции u в точке $M_0(3,1,1)$ в направлении вектора $\overline{S}=(1,2,-2)$ и объяснить физический смысл полученного результата.

Решение.

а) Найдем частные производные от функции $u(x,y,z)$ и вычислим их в точке M_0:

$$u'_x=\left(y^2z+3z^2-4xyz\right)'_x=-4yz, \qquad u'_x(M_0)=(-4yz)\big|_{(3,1,1)}=-4,$$

$$u'_y=\left(y^2z+3z^2-4xyz\right)'_y=2yz-4xz, \qquad u'_y(M_0)=(2yz-4xz)\big|_{(3,1,1)}=-10,$$

$$u'_z=\left(y^2z+3z^2-4xyz\right)'_z=y^2+6z-4xy, \quad u'_z(M_0)=\left(y^2+6z-4xy\right)\big|_{(3,1,1)}=-5.$$

Применяя формулы (8.1), (8.2), получаем:

$$\operatorname{grad} u(M_0)=-4\overline{i}-10\overline{j}-5\overline{k},$$

$$\left|\operatorname{grad} u(M_0)\right|=\sqrt{(-4)^2+(-10)^2+(-5)^2}=\sqrt{141}.$$

Вывод. Заданная функция $u(M)$ в точке M_0 возрастает с максимальной скоростью, равной $\sqrt{141}$, в направлении вектора $\operatorname{grad} u(M_0)=$ $=(-4,-10,-5)$.

б) Определим модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{S}=(1,2,-2)$ по формулам (8.4):

$$\left|\overline{S}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3;$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{3}, \qquad \cos\beta=\frac{2}{3}, \qquad \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

Применяя формулу (8.3), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial s}(M_0)=-4\cdot\frac{1}{3}+(-10)\cdot\frac{2}{3}+(-5)\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{-4-20+10}{3}=-\frac{14}{3}.$$

Вывод. Функция в точке M_0 в направлении вектора $\bar{S}$ убывает со скоростью $\frac{14}{3}$ единиц скорости.

9. Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z = Z(x, y)$ определена в некоторой области D и $M_0(x_0, y_0)$— внутренняя точка области.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $z = Z(x, y)$, если существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек $M(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство:

$$Z(x_0, y_0) \geq Z(x, y) \quad \left(Z(x_0, y_0) \leq Z(x, y)\right).$$

Точки (локального) максимума и минимума функции называются точками *экстремума*.

Необходимое условие экстремума дает следующая теорема.

Теорема. Пусть (x_0, y_0) — точка экстремума дифференцируемой функции $z = Z(x, y)$. Тогда частные производные

$$Z'_x(x_0, y_0) = 0 \text{ и } Z'_y(x_0, y_0) = 0. \quad (11)$$

Другими словами, $\operatorname{grad} Z(M_0) = \bar{0}$.

Точку M_0, в которой выполнены условия (11), называют *стационарной* точкой функции.

Экстремум функции возможен не только в её стационарных точках, но и в таких точках, в которых $\operatorname{grad} Z$ не существует, т. е. не существует хотя бы одна из частных производных Z'_x или Z'_y. Такие точки вместе со стационарными называются *критическими* точками функции.

Не любая критическая точка функции является точкой экстремума. Следующая теорема устанавливает достаточные условия экстремума функции в стационарной точке.

Теорема. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка функции $Z(x, y)$, т. е. $Z'_x(M_0) = 0$ и $Z'_y(M_0) = 0$, и в некоторой окрестности этой точки все частные производные второго порядка функции $Z(x, y)$ непрерывны.

Обозначим:

$$A = Z''_{xx}(M_0),\ B = Z''_{xy}(M_0),\ C = Z''_{yy}(M_0),\ \Delta(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \quad (12)$$

Тогда:

1) если $\Delta(M_0) > 0,$ то в точке M_0 функция имеет экстремум: минимум, если $A > 0$, и максимум, если $A < 0$;

2) если $\Delta(M_0) < 0,$ то в точке M_0 функция не имеет экстремума;

3) если $\Delta(M_0) = 0,$ то вопрос о наличии экстремума требует дополнительного исследования (назовем случай $\Delta = 0$ неопределенным).

Алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум:

1) найти область определения функции;

2) определить критические точки функции в ее области определения, т. е. точки, в которых частные производные Z'_x и Z'_y равны нулю или не существуют;

3) определить частные производные второго порядка;

4) проверить выполнение достаточных условий экстремума (12) для каждой стационарной точки;

5) вычислить значения функции в точках экстремума.

Задание 9. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - x^2y - xy^2$.

Решение. Исследование функции $Z(x, y)$ на экстремум проводим согласно вышеуказанному алгоритму.

1. Область определения функции $z = 2xy - x^2y - xy^2$ — вся плоскость OXY.

2. $z'_x = \left(2xy - x^2y - xy^2\right)'_x = 2y - 2xy - y^2;$

$z'_y = \left(2xy - x^2y - xy^2\right)'_y = 2x - x^2 - 2xy.$

Обе частные производные определены для любых (x, y). Следовательно, точками, подозрительными на экстремум, могут быть только стационарные точки. Определим их из условий $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} z'_x = 2y - 2xy - y^2 = 0, \\ z'_y = 2x - x^2 - 2xy = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y(2 - 2x - y) = 0, \\ x(2 - x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим координаты стационарных точек:

$M_0\,(0, 0)$; $M_1\,(0, 2)$; $M_2\,(2, 0)$; $M_3\,(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

3. $z''_{xx} = (2y - 2xy - y^2)'_x = -2y, \quad z''_{xy} = (2y - 2xy - y^2)'_y = 2 - 2x - 2y,$

$z''_{yx} = (2x - x^2 - 2xy)'_x = 2 - 2x - 2y, \quad z''_{yy} = (2x - x^2 - 2xy)'_y = -2x.$

4. Точка $M_0\,(0, 0)$:

$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_0} = 0,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_0} = 2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_0} = 0,$

$\Delta(M_0) = AC - B^2 = 0 - 2^2 = -4 < 0.$

Следовательно, в точке $M_0(0, 0)$ данная функция экстремума не имеет.

Точка $M_1\,(0, 2)$:

$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_1} = -4,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_1} = -2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_1} = 0,$

$\Delta(M_1) = AC - B^2 = -4 \cdot 0 - (-2)^2 = -4 < 0 \Rightarrow$ В точке $M_1\,(0, 2)$ экстремума нет.

Точка $M_2\,(2, 0)$:

$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_2} = 0,\ B = z''_{xy} = (2 - 2x - 2y)_{M_2} = -2,\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_2} = -4,$

$\Delta(M_2) = AC - B^2 = 0 \cdot (-4) - (-2)^2 = -4 < 0 \Rightarrow$ В точке $M_2\,(2, 0)$ экстремума нет.

Точка $M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$:

$A = z''_{xx} = (-2y)_{M_3} = -\dfrac{4}{3},\ B = z''_{xy} = (2-2x-2y)_{M_3} = -\dfrac{2}{3},\ C = z''_{yy} = (-2x)_{M_3} = -\dfrac{4}{3},$

$\Delta(M_3) = AC - B^2 = \left(-\dfrac{4}{3}\right)\left(-\dfrac{4}{3}\right) - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{3} > 0 \Rightarrow$ В точке M_3 функция имеет экстремум, так как $A = -\dfrac{4}{3} < 0$, то $M_3\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ — точка максимума функции.

5. $z_{\max} = z\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = 2 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{27}.$

10.Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C,$ где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx = F(x) + C,$ где $F'(x) = f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);\quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$

2. $\int dF(x) = F(x) + C;\quad$ 3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,\ k$ — const;

4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов приведена в Приложении 2. Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Задание 10. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}\right)dx;\qquad б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2} + 3\cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}\right)dx = \int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^4} + 2x^{5/6}\right)dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{matrix}\right\} = 5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}} = -$$

$$-3\int\frac{dx}{x} - \int x^{-4}dx + 2\int x^{5/6}dx = \left\{\begin{matrix}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{matrix}\right\} = 5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right| -$$

$$3\ln|x| - \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1} + C = 5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right| - 3\ln|x| + \frac{1}{3x^3} + \frac{12}{11}x^{11/6} + C.$$

$$= 5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right| - 3\ln|x| + \frac{1}{3x^3} + \frac{12}{11}x^{11/6} + C.$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2} + 3\cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x}\right)dx = 5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)} + 3\int 5^x dx + \int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx =$$

$$= \frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2/11}\right)^2} + 3\int 5^x dx + 4\int dx - \int x\,dx = \left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы}\\ \text{интегралов}\end{matrix}\right\}$$

$$=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{2/11}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2/11}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+$$

$$+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

11.Метод замены переменной

Теорема. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (11.1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (11.1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Среди интегралов, вычисляемых с помощью замены переменной, выделим интегралы вида: $\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx$ и $\int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

При их вычислении необходимо выделить в знаменателе полный квадрат, для чего используется стандартная замена:

$$x=t-\frac{b}{2a},\ dx=dt,\ t=x+\frac{b}{2a}. \qquad (11.22)$$

Задание 11. Проинтегрировать подходящей заменой переменной (подведение под знак дифференциала).

а) $\int\cos 4x dx$; *б*) $\int e^{9x+1}dx$; *в*) $\int x(2-x^2)^5dx$; *г*) $\int\frac{x-2}{x^2+6x+10}dx$.

Решение:

$$а)\ \int \cos 4x dx = \begin{vmatrix} t = 4x,\ dt = 4dx, \\ dx = dt/4 \end{vmatrix} = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \begin{Bmatrix} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{Bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1} dx = \begin{vmatrix} t = 9x+1,\ dt = 9dx, \\ dx = dt/9 \end{vmatrix} = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \begin{Bmatrix} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{Bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5 dx = \begin{vmatrix} t = -x^2,\ dt = -2xdx, \\ xdx = -dt/2 \end{vmatrix} = \int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5 dt = \begin{Bmatrix} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{Bmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

$$г)\ \int \frac{x-2}{x^2+6x+10} dx = \begin{Bmatrix} \text{Используем замену (2),} \\ \text{учтем, что } a=1,\quad b=6 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} x = t-3,\ dx = dt, \\ t = x+3 \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{t-3-2}{(t-3)^2+6(t-3)+10} dt = \int \frac{t-5}{t^2-6t+9+6t-18+10} dt = \int \frac{t-5}{t^2+1} dt = \int \frac{tdt}{t^2+1} -$$

$$-5\int \frac{dt}{t^2+1} = \begin{vmatrix} \text{для 1-го интеграла} \\ z = t^2+1 \\ dz = 2tdt;\ tdt = dz/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - 5\int \frac{dt}{t^2+1} = \begin{Bmatrix} \text{формулы 4, 13} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\ln|z| -$$

$$-5\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| - 5\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+6x+10\right| - 5\operatorname{arctg}(x+3) + C.$$

12. Интегрирование по частям. Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \tag{11.3}$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n = 1, 2, \ldots$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$ $\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$ $\int \arccos kx\,P_n(x)dx$ $\int \mathrm{arctg}\,kx\,P_n(x)dx$ $\int \mathrm{arcctg}\,kx\,P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \frac{dx}{x}$ $U = \arcsin kx \to dU = \frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ $U = \arccos kx \to dU = -\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ $U = \mathrm{arctg}\,kx \to dU = \frac{kdx}{1+k^2x^2}$ $U = \mathrm{arcctg}\,kx \to dU = -\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, $a_0 \neq 0$.

Задание 12. Проинтегрировать по частям.

а) $\int (3x-1)\sin 2x dx$; *б)* $\int (1+2x)\ln x dx$.

Решение.

$$а)\ \int (3x-1)\sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \to dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \to V = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = -(3x-1)\frac{\cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2}dx =$$

$$=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

$$б)\int(1+2x)\ln xdx=\left|\begin{array}{l}U=\ln x\to dU=\dfrac{dx}{x}\\ dV=(1+2x)dx\to\\ V=\int(1+2x)dx=x+x^2\end{array}\right|=\ln x(x+x^2)-\int(x+x^2)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x(x+x^2)-\int(1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Теоретические вопросы

Раздел 1. Линейная алгебра. Векторная алгебра.

1. Понятие матрицы, типы матриц
2. Операции с матрицами (сложение, умножение на число, умножение матрицы на матрицу, транспортирование матриц). Свойства операций.
3. Определители матриц, их свойства.
4. Разложение определителя по элементам любой строки, столбца.
5. Обратная матрица. Критерий ее существования и формула для вычисления.
6. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
7. Совместные, несовместные, определенные, неопределенные СЛАУ.
8. Формулы Крамера для решения СЛАУ.
9. Матричный метод решения СЛАУ.
10. Минор матрицы, ранг матрицы.
11. Элементарные преобразования матриц, эквивалентные матрицы и их ранги.
12. Линейно зависимые, линейно независимые строки матрицы. Критерий линейной зависимости.
13. Критерий совместности СЛАУ Кронекера-Капелли.
14. Метод Гаусса решения СЛАУ. Базисный минор, базисные и свободные переменные СЛАУ.
15. Понятие n-мерного вектора, операции с векторами.
16. Линейное арифметическое векторное пространство.
17. Линейно зависимая и независимая система векторов. Критерий линейной зависимости системы векторов.
18. n-мерное евклидово пространство En. Скалярное произведение в E_3, его свойства. Механический смысл скалярного произведения, модуль вектора, направление косинусы вектора.
19. Проекция вектора на вектор, ортогональные, коллинеарные, компланарные векторы.

24. Вектор как направленный отрезок. Декартов прямоугольный базис и декартова прямоугольная система координат (д.п.с.к.).
25. Радиус-вектор точки, координаты точки в д.п.с.к.

26. Векторное произведение векторов в E_3, его свойства, механический смысл.

27. Смешанное произведение векторов в E_3, его свойства.

28. Условия ортогональности, коллинеарности, компланарности векторов в E_3.

Раздел 2. Аналитическая геометрия

1. Понятие уравнения геометрического образа.

2. Плоскость, нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости и его частные случаи.

3. Угол между плоскостями, условие перпендикулярности и параллельности плоскостей, расстояние от точки до плоскости. Плоскость в En, $n>3$.

4. Прямая в E_3, ее направляющий вектор. Общие, канонические, параметрические уравнения прямой. Луч и отрезок.

5. Угол между прямыми в E_3. Перпендикулярные, параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые. Расстояние от точки до прямой в E_3. Прямая, луч и отрезок в En, $n>3$.

6. Угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Точка пересечения прямой и плоскости, принадлежность прямой плоскости.

7. Прямая на плоскости, как частный случай прямой в E_3 и как линия пересечения плоскости с плоскостью OXY.

8. Уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом.

Раздел 3. Введение в анализ

1. Функция одной переменной, способы задания. Основные элементарные функции, их графики. Сложная функция.

2. Предел функции.

3. Бесконечно малая функция и ее свойства.

4. Бесконечно большая функция, связь с бесконечно малой.

5. Основные теоремы о пределах функции (критерий существования предела, единственность, предел суммы, произведения, частного).

6. Первый и второй специальные пределы.

7. Сравнение бесконечно малых функций.

8. Непрерывность функции в точке, на интервале, отрезке. Основные теоремы о непрерывных функциях (непрерывность основных элементарных функций, сложной функции).

9. Свойства функций непрерывных на замкнутом отрезке, абсолютный экстремум функции.

Раздел 4. Производная функции одной переменной

1. Приращение аргумента и приращение функции. Задача о касательной к плоской кривой.

2. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой.

3. Необходимое условие дифференцируемости функции.
4. Основные правила и формулы дифференцирования.
5. Дифференциал функции, его геометрический смысл, свойства, применение к приближенным вычислениям.
6. Производные и дифференциалы высших порядков.

Раздел 5. Приложения производной

1. Теоремы Ролля, Лагранжа.
2. Монотонность функции, достаточное условие монотонности.
3. Определение локального максимума (минимума) функции, экстремума функции.
4. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции, непрерывной функции.
5. Первый и второй достаточный признак экстремума.
6. Абсолютный экстремум функции на отрезке.
7. Выпуклость функции, точки перегиба. Достаточное условие выпуклости функции.
8. Достаточное условие точки перегиба. Необходимое условие.
9. Асимптоты графика функции вертикальные, наклонные.
10. Правило Лопиталя.

Раздел 6. Функции нескольких переменных (ФНП)

1. Определения функций 2-х, 3-х и n переменных, область определения и способы задания.
2. График функции 2-х переменных. Линии и поверхности уровня.
3. Предел и непрерывность ФНП.
4. Частные и полные приращения функции 2-х переменных. Частные производные, их геометрический смысл.
5. Скалярное поле, его эквипотенциальные поверхности. Производная по направлению.
6. Градиент функции скалярного поля. Теорема о проекции вектора градиента на направление.
7. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных частных производных.
8. Экстремум функции двух переменных, его необходимое условие (теорема).
9. Достаточные условия экстремума функции двух переменных (теорема).

Раздел 7. Неопределенный интеграл (НИ)

1.Первообразная. Теорема о первообразной. НИ, его геометрический смысл.
2. Свойства НИ.
3. Таблица основных интегралов.
4. Теорема о замене переменной в НИ.
5. Интегрирование по частям в НИ.

Учебно-методические материалы и программно-информационное обеспечение

№ п/п	Автор	Название	Издатель-ство	Год издания	Вид издания	Адрес электронного ресурса	Вид доступа
1	2	3	4	5	6	8	9
1.1	Бермант А.Ф., Араманович И.Г.	Краткий курс математического анализа	СПб: Лань	2008	Учебное пособие		
1.2	Владимирский Б.М., Горстко	Математика общий курс	СПб: Лань	2008	учебник		
1.3	Данко П.Е. Попов А.Г.	Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1	М.: Мир и Об-разование	2015 2009 2008 2007	Учебное пособие		
1.4	Данко П.Е. Попов А.Г.	Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.2	М.: ОНИКС: Мир и Об-разование	2015 2009 2008 2007	Учебное пособие		
2.1	Шипачёв В.С.	Высшая математика	М: Юрайт	2011 2012	Учебное пособие		
2.2	Виленкин И.В.	Высшая математика: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное и интегральное исчисление	Ростов н/Д: Феникс	2011	Учебник		
2.3	Виленкин И.В.	Высшая математика: интегралы по мере, дифференциальные уравнения, ряды	Ростов н/Д: Феникс	2011	Учебник		
2.4	Кузнецов Б.Т	Математика	М.: ЮНИТИ-ДАНА	2012	учебник	http://iprbookshop.ru	С любой точки доступа для авторизованного поль-зователя
2.5	Полтинни	Высшая	Ростов	2012	Уче		

	ков В.И.	математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.1	н/Д: ИЦ ДГТУ		бное посо бие		
2.6	Полтинни ков В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.2	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2013	Уче бное посо бие		
2.7	Полтинни ков В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.3	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2014	Уче бное посо бие		
6.2.10	Полтинни ков В.И.	Высшая математика: учебное пособие для бакалавров. Ч.4	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2015	Уче бное посо бие		
2.8	Пожарски й Д.А., Нурутдин ова И.Н.	Избранные главы математики: интегральное исчисление, дифференциальны е уравнения	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2014	Уче бное посо бие		
2.9	Нурутдин ова И.Н., Соболев В.В.	Сборник образцов решения заданий базового уровня по дисциплине «Математика»	Ростов н/Д: ИЦ ДГТУ	2013	Уче бное посо бие	ntb.don stu.ru	С любой точки доступа для авторизова нного поль-зователя
3.1		Сайт Math Высшая математика. Решение задач и примеров – online				http://www.math-pr.com/index.html	С любой точки доступа
3.2		Сайт Решение задач по математике online				http://www.reshmat.ru/index.html	С любой точки доступа

Приложение 1

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	**VI**	Производная сложной функции $y = f[u(x)]$, $y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	**VII**	Функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$, $c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $(v(x) \neq 0)$	**VIII**	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$, $(y'_x \neq 0)$.
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}$, $c = \text{const}$ $(v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$c' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\text{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$	**11**	$(\text{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $\lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(u > 0)$	**14**	$(\text{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u > 0)$	**15**	$(\text{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Замечание. Формулы записаны с учётом правила дифференцирования сложной функции.

Приложение 2

Таблица основных интегралов

№ п/п	c = const, x – независимая переменная, $u=u(x)$	№ п/п	c = const, x – независимая переменная, $u=u(x)$
1.	$\int 0du = C; \quad C = \text{const};$	10.	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\text{ctg}u + C;$
2.	$\int du = u + C;$	11.	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$
3.	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$	12	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C;$
4.	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C;$	13.	$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{u}{a} + C;$
5.	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$	14.	$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C;$
6.	$\int e^u du = e^u + C;$	15.	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\|\text{tg}\frac{u}{2}\right\| + C;$
7.	$\int \cos u\, du = \sin u + C;$	16.	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\|\text{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C;$
8.	$\int \sin u\, du = -\cos u + C;$	17.	$\int \text{tg}u\, du = -\ln\|\cos u\| + C;$
9.	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \text{tg}u + C;$	18.	$\int \text{ctg}u du = \ln\|\sin u\| + C.$